

c
Elementar-Mechanik

nach

VORTRÄGEN

gehalten an der polytechnischen Schule

1858-59.

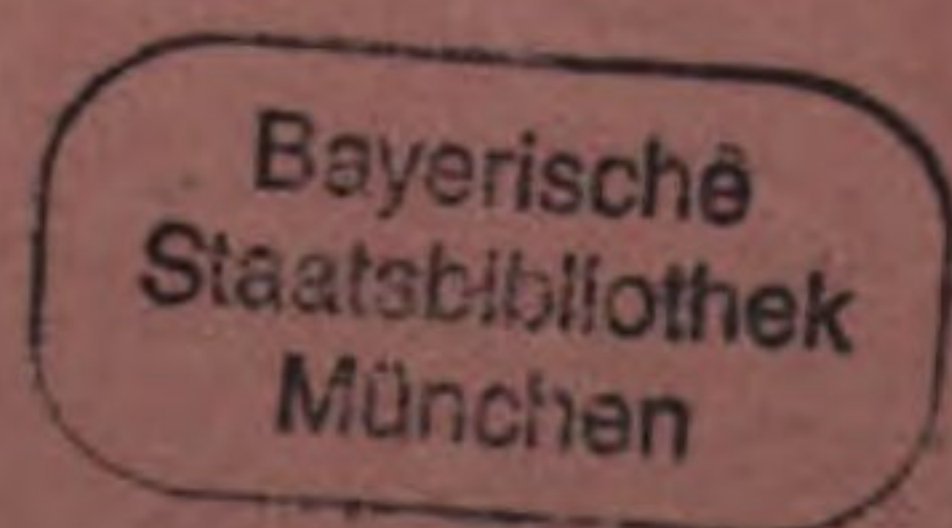
von

Dr. A. CLEBSCH

Professor.

CARLSRUHE

Anthographie der lith. Anstalt
v. L. Geißendörfer.



Elementar-Mechanik.

§. 1. Einleitung. Geschwindigkeit. Beschleunigung.

Wir sehen alles in der Natur sich verändern, und sind ge-
neigt, diese Veränderungen auf völlige Verfassungen zurückzuführen,
welche die Körper, oder einzelne Theile derselben befehlen. Indem wir
diese Veränderungen materieller Gebilde in ihren allgemeinen
Gesetzen darzulegen bestrebt sind, entsteht die Wissenschaft der
Mechanik. Ihre Aufgabe ist, die Bewegungen der Körper zu betrachten,
in Rücksicht auf ihre räumliche Ausdehnung, in Rücksicht auf die
Zeit und Masse ihrer Ausdehnung, in Rücksicht endlich auf die Kräfte,
welche sie hervorbringen können.

Es gibt gewisse Verhältnisse, unter welchen keine Bewegung
zu Stande kommt. Die Betrachtung derselben hat man wohl
unter dem Namen der Statik zu einer besondern Wissenschaft
gemacht, und die Untersuchung der Bewegungen, im Gegensatz
dazu, der Dynamik überwiesen. Doch sind diese systematische
Einteilung beider Disciplinen meistens bedenklich zu unterliegen.
Obwohl wir es in der Natur selbst mit Körpern zu thun haben,
so ist es doch zweckmäßig, zunächst die Bewegungen zu untersuchen,
welche Punkte ausmachen können, d. h. Körper, deren
Dimensionen so klein sind, daß sie den übrigen betrachteten
Raumgrößen gegenüber keine Berücksichtigung erfordern.
Doch mag es beinahe selbstverständlich sein, die für sie gewonnenen

Kapillare, der Aufsenlichkeit wegen, zugleich auf Körper von andern Dimensionen zu übertragen.

Die einfachste Bewegung, welche ein Punkt im Räume ausführen kann, ist eine geradlinige, welche zugleich der Körper in gleicher Zeit immer um gleiche Strecken fördert. Man nennt diese Bewegung die gleichförmige; und diejenige Strecke, welche der Körper in einer Secunde zurücklegt, die Geschwindigkeit desselben. Sie ist in jeder Secunde die nämliche; und wenn man sie durch v bezeichnet, so hat demnach der Punkt nach t Secunden die Strecke zurückgelegt

$$1. \dots x = v \cdot t$$

Kurz darauf folgt sic auch, daß man die Geschwindigkeit einer gleichförmig bewegten Punktes erfährt, wenn man den Weg durch die Zeit dividirt, in welcher derselbe zurückgelegt ist; und die Linie eines Weges sofortwährende Zeit, indem man den Weg durch die Geschwindigkeit dividirt:

$$2. \dots v = \frac{x}{t} \quad t = \frac{x}{v}$$

Den Begriff der Geschwindigkeit kann man auf alle Bewegungen übertragen. Dann wird auf die Bewegung beschaffen sein mag, so daß man doch annehmen, daß sie sich immerfallseiner sehr kleinen Zeit nur sehr wenig verändert, und man kann sie daher immerfall diese Zeit als gleichförmig betrachten. Demnach wird daher die augenblickliche Geschwindigkeit des Punktes dadurch erhalten, daß man sich der sehr kleinen Zeitstrecke in den

kleinen Weg zurück, welcher innerhalb derselben zurückgelegt ist.

Man kann sich sehr wohl über sich selbst vorstellen, daß von dem Augenblicke an, in welchem die Gesammtheit bestimmt vorüber ist, alle diejenigen Körper aufhören, welche die Bewegung des Punktes hervortreiben und daß also der Punkt von dem gedachten Augenblicke an sich gleichförmig bewegt. Die Gesammtheit dieser Bewegung ist demnach zugleich die Gesammtheit des Punktes im letzten Augenblicke seiner vorübergehenden Bewegung.

Die einfachste Bewegung unter denjenigen, welche sich von der gleichförmigen unterscheiden ist eine solche, deren Gesammtheit in jedem Augenblicke nur die nämliche Größe, sei es positiv, sei es negativ, ist. In beiden Fällen nennt man diese Bewegung eine gleichförmig beschleunigte, und diejenigen Größen, um welche die Gesammtheit in einem Zeitelemente zunimmt, nennt man die Beschleunigung; dieselbe ist positiv, sobald die Gesammtheit wächst, negativ im entgegengesetzten Falle. Nennen wir diese Größe g , so muß die Gesammtheit nach t Sekunden sich um gt vermehrt haben; und wenn sie Anfangs $= v_0$ war, so ist sie also am Ende dieser Zeit:

$$3 \quad v = v_0 + gt$$

was auch immer das die Beschleunigung ausfallen wird, wenn man den Zuwachs der Gesammtheit durch die Zeit dividirt.

Auf den Begriff der Beschleunigung kann man zugleich auf alle Bewegungen anwenden. Denn während einer sehr kurzen Zeit wird man jede beliebige Bewegung durch eine gewisse gleichförmig beschleunigte Bewegung darstellen können und die Beschleunigung

Ergebnis wird für die augenblickliche Beschleunigung der wirklichen Bewegung gelten dürfen.

S. 2. Von der Geschwindigkeitscurve

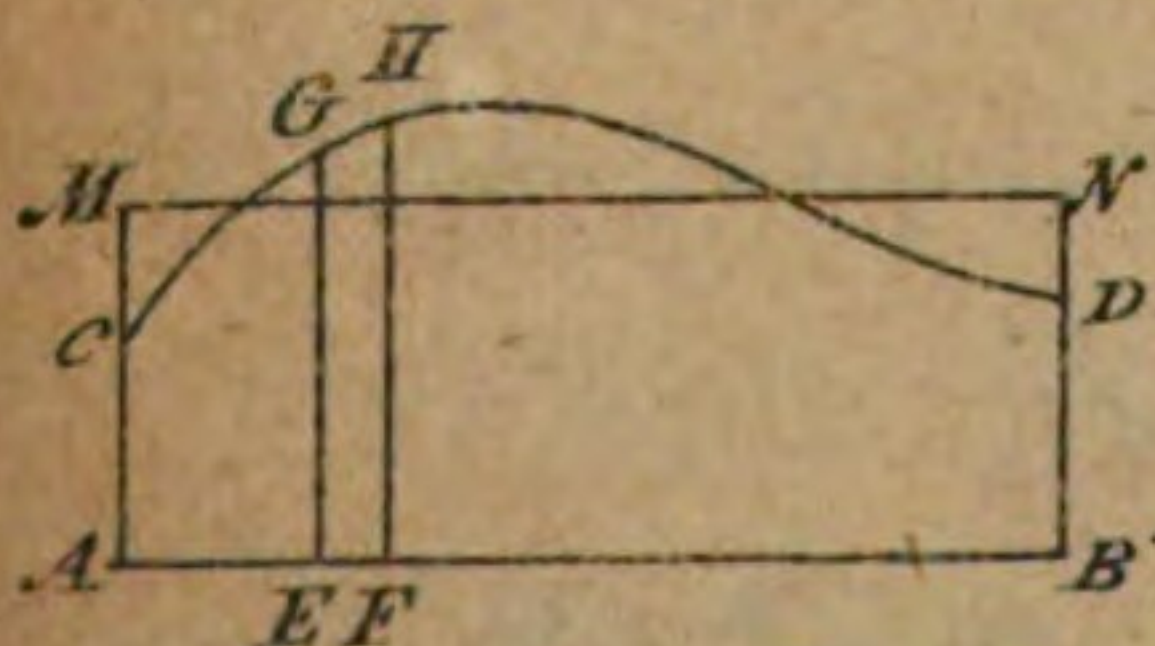
Zur Beaufschlagung einer beliebigen Bewegung ist es zweckmäßig, sich der folgenden graphischen Darstellung zu bedienen:

Auf der horizontalen Linie AB lassen wir uns die während der Bewegung verfließende Zeit t eintragen, wobei eine Zeiteinheit durch die Länge von 1 Meter angedeutet wird. (Neben jedem Punkte dieser Linie errichten wir ein Lot, welche der Geschwindigkeit gleichkommen soll, die dem entsprechenden Augenblicke zukommt. Die Endpunkte aller Lote bilden die Geschwindigkeitscurve CD . Für den Fall der gleichförmigen Bewegung geht dieselbe in eine horizontale gerade Linie über, im Allgemeinen aber steigt sie, sobald die Geschwindigkeit wächst, und senkt sie sich, sobald die Geschwindigkeit abnimmt; sie gibt endlich für die Punkte der größten und kleinsten Geschwindigkeit horizontale Tangenten.

Es ist oben bereits bemerkt, daß man einen kleinen Theil jeder beliebigen Bewegung als gleichförmig betrachten kann.

Betrachten wir also den kleinen Linienseil GH , welcher über dem Zeitelement EF liegt, so können wir den wahren und die Zeitfehler durchlaufenen Weg nach S. 1.

Durch das Product von Zeit und Geschwindigkeit, d. h. durch GE . EF darstellen; oder durch das Flächenelement GH . FE . Dann wenn auf der einen Theil dieser Fläche von einem Rechtecke abgezogen, so ist der



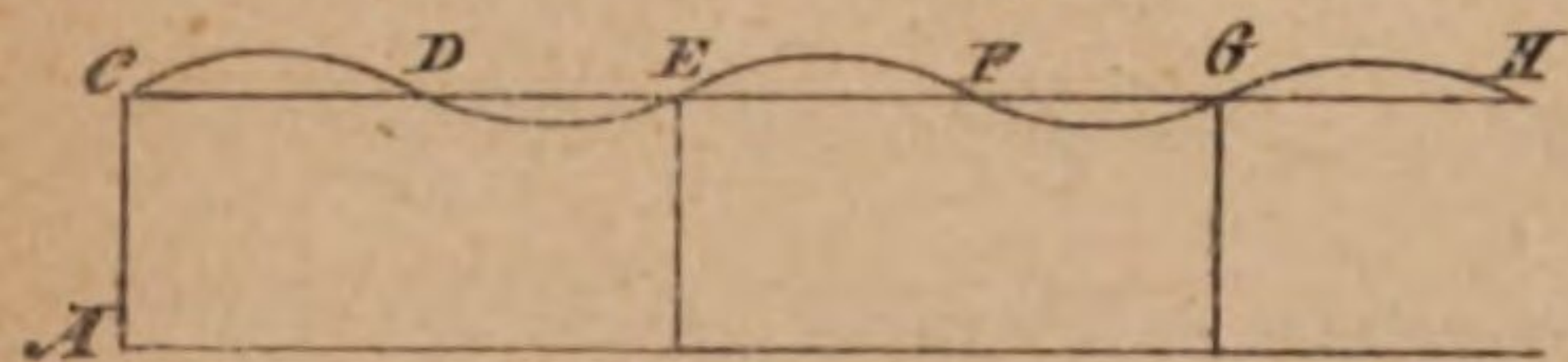
nach der Natur der selbstständigen Abweichung bei der Bewegung der Fläse
 sehr klein gegen die ganze Fläse $GHEF$ selbst, und sie wird nur so
 geringer in Verhältnisse zu dieser, je näher man die Ordinaten
 EG, HF aneinander rücken läßt. Sankt man also schließlich diese
 Ordinaten unendlich genähert, so fällt in der That das Fläsen-
 element mit dem Elemente des durchlaufenen Weges zusammen,
 und das ganze während der Zeit AB durchlaufene Weg wird durch
 die Summe aller jener Elemente dargestellt. Man hat daher
 den Satz:

Der durchlaufene Weg wird durch die Fläse
der Geschwindigkeit beinahe gemessen.

Wenn man die ganze Fläse $ACDB$ sich in ein Rechteck über
 dieselbe Grundlinie AB verwandelt, so stellt die Höhe dar, welche
 AM eine Geschwindigkeit dar, mit welcher sich der gegebene
 Punkt gleichförmig bewegen müßte, um in der nämlichen
 Zeit AB den nämlichen Weg zu durchlaufen, welchen der Punkt
 wirklich, aber mit ungleicher Geschwindigkeit durchlaufen hat.
 Diese Geschwindigkeit nennt man die mittlere Geschwindigkeit der
 ganzen Bewegung; und da $AM \cdot AB = ACDB$, so erfüllt man die-
 selbe offenbar, wenn man den wirklich durchlaufenen Weg durch
 die Zeit dividirt, in welcher er zurückgelegt ist.

Als Beispiel setzen mag die Bewegung eines Punktes dienen,
 welcher, mit gleichförmiger Geschwindigkeit v fortgesetzt, zu-
 gleich in der Richtung dieser Bewegung Oscillationen ac =

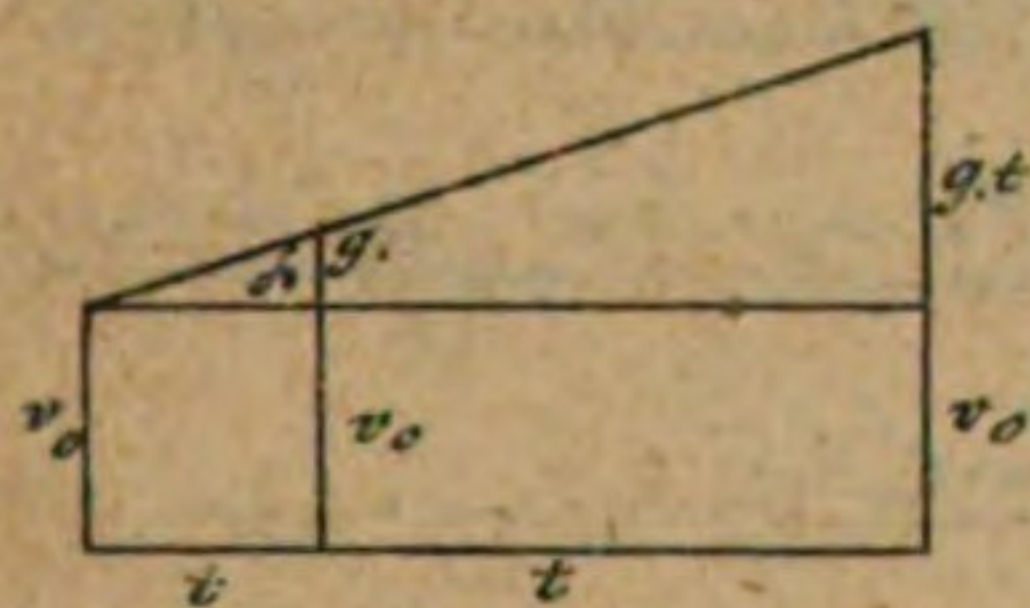
folgt, welche dazu dienen, die absolute Geschwindigkeit des Punktes
absolut größer und kleiner zu machen, als die Geschwindigkeit v ,
wie auch der Rollen einer in Bewegung gesetzten locomotiva
sie besteht. Die Geschwindigkeit kann jetzt in diesem Falle



konstante haben, welche ab-
wechselnd über und unter der in

der Höhe v gezogenen Horizontalen liegen. Die mittlere Geschwindig-
keit der Bewegung ist also für die Zeitabschnitte CE , CA etc.
 $= v$, weil in diesen Fällen die Abweichungen der Kurve nach
beiden Seiten der Linie CH einander aufheben. Es ist dies nicht
nur der Fall, wenn der Endpunkt der betrachteten Bewegung in
einem unteren Punkt als E oder A etc. vorliegt, sondern auch in der
Geschwindigkeit größer als v , und am größten, wenn der Endpunkt
der Bewegung in D oder F etc. fällt. In diesen Fällen ist wenn
es geschieht die Geschwindigkeit kann in ein Rastloch zu ver-
wandeln. Die Klänge eines oberen Kurvenstücks über die
Zeitpunkte CD oder CF zu vertheilen. Man sieht, daß also mit
wechselnder Zeit sich ein sehr abwechselnder Einfluß auf die
Bestimmung der mittleren Geschwindigkeit hat; daß also die
Bewegungen derselben in einem engen Rahmen eingeschlossen
werden und nach Verlauf einer sehr langen Zeit v wirklich für
die beständige mittlere Geschwindigkeit angesehen werden darf.
Nur ist ein in der oben angegebenen Pütz zur
Bestimmung des Ortes an, welcher ein Körper mit gleichförmiger

Beschleunigung zurücklegt. Da die Geschwindigkeit nun dem Maasse v_0 (S. 1, 3) ungleichmäßig wächst, so wird die Geschwindigkeitcurve sich in eine gerade Linie verwandeln, welche von der Höhe v_0 bis zu der Höhe $v_0 + gt$ ansteigt, je nachdem g positiv oder negativ ist. Die Fläche der Geschwindigkeitscurve besteht also aus dem Rechtecke $v_0 t$ und aus einem Dreiecke, dessen Fläche $\frac{1}{2} g t^2$. Daraus ist der durchschnittliche Weg dargestellt durch die Formel:



4. ... $R = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$

eine Formel, welche mit 3 zusammen diese Art der Bewegung vollständig darstellt.

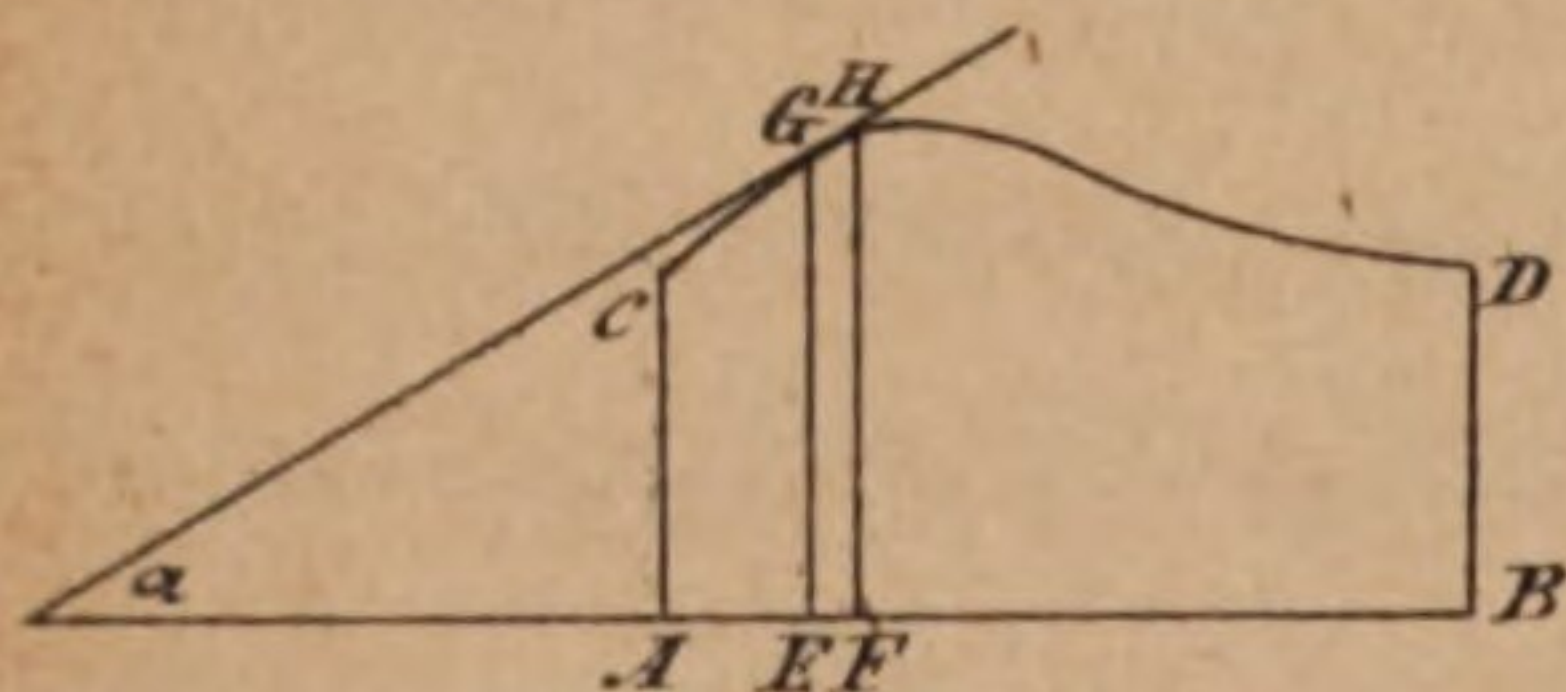
Es mag hier die allgemeine Bemerkung ihren Platz finden, welche aus der Natur der Geschwindigkeitscurve oder Kurve folgt, daß wenn die Geschwindigkeit in bestimmten Abständen gemessen wird, der zurückgelegte Weg gleich den Abständen selbst ist, welche die einzelnen Theile der Geschwindigkeit für sich gegeben würden.

Die Geschwindigkeit bei mit gleichförmiger Beschleunigung bewegten Punkten nach Verlauf eines Moments ist $= v_0 + g$, oder, wie man unmittelbar sieht, der Neigungswinkel α der Geschwindigkeitslinie gegen die Abscissa ist bestimmt durch die Gleichung:

$$5. \dots t g \alpha = g.$$

Diese Bemerkung ermöglicht es, aus der Geschwindigkeit

man auf die Beschleunigung für jeden Augenblick angeben.
 Dann wenn man den kleinen Liniensegment GH als gerade Linie



betrachtet, gilt die Tangente GH als
 Tangentialwinkel gegen die Horizontale
 gleich der Beschleunigung für den
 Zeitmoment E F ; so daß man den Satz hat:

Die augenblickliche Beschleunigung ist gegeben durch die tri-
 gonometrische Tangente desjenigen Winkels, welchen die tri-
 gonometrische Tangente gegen die Abszissenaxe bildet.

B. 3. Vertikale Fallbewegung.

Im reinen Fall der Bewegung unter dem Einfluß einer
 constanten Beschleunigung, welche nach dem Obigen durch
 die Gleichungen

$$v = v_0 + gt \quad x = v_0 t + \frac{1}{2} gt^2$$

ausgedrückt wird finden wir in der Natur bei Körpern, welche
 nur unter dem alleinigen Einfluß der Schwerkraft befinden.
 Die Anziehung der Erde wirkt jedem Körper die Beschleunigung
 $g = 9,81 \text{ m}$ gegen ihre Oberfläche mit. Lassen wir also einen
 Körper aus der Höhe h ohne Anfangsgeschwindigkeit fallen,
 so ist die Zeit, nach welcher er den Erdboden erreicht, wenn die
 Beschleunigung, mit welcher er auf denselben gelangt, den
 gesuchten durch die Gleichungen:

$$h = \frac{1}{2} gt^2 \quad v = gt,$$

aus welcher sich die Wurfweite findet:

$$7 \dots t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (\text{Fallzeit}); \quad v = \sqrt{2hg} \quad (\text{Endgeschwindigkeit}).$$

Laßen wir dagegen in der Höhe h den Körper zunächst ruhen, so müssen wir Anfangsgeschwindigkeit v_0 geben, wenn wir die positiven Bewegungen nach der vertikalen versuchen, und wir haben die Bewegungsgleichungen:

$$8 \dots v = -v_0 + gt \quad x = -v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

Der Körper bewegt sich nach unten, bis seine Geschwindigkeit Null geworden ist, d. h. bis zu dem Punkt wo

$$9 \dots t = \frac{v_0}{g} \quad x = -\frac{v_0^2}{2g} \quad (\text{Weghöhe}).$$

Jetzt beginnt er zu fallen, erreicht seinen frühesten Standpunkt wieder, wenn $x = 0$ geworden, d. h. für

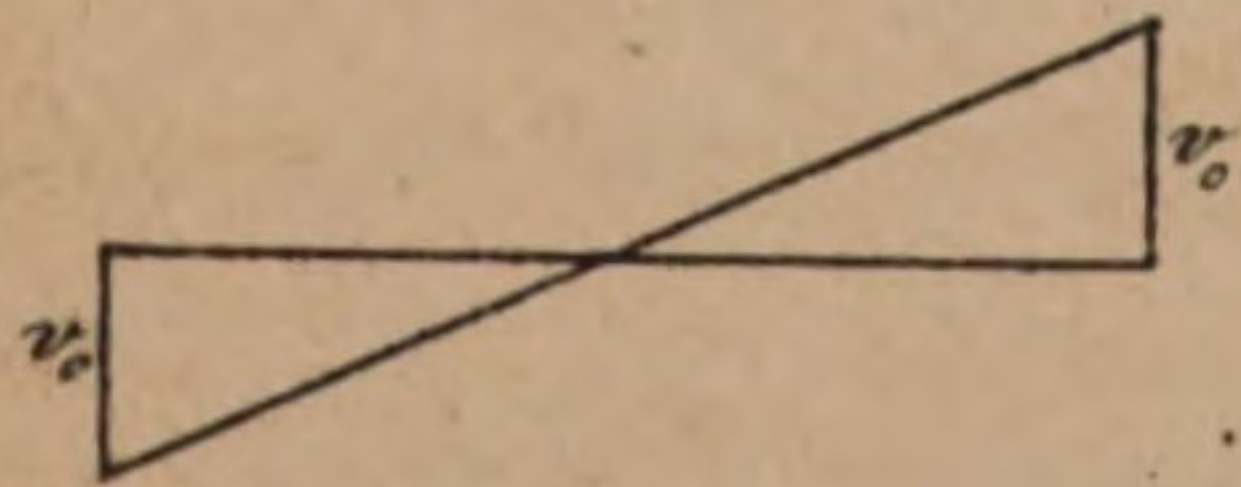
$$10 \dots t = \frac{2v_0}{g} \quad v = v_0,$$

und erreicht endlich den Fußboden wenn

$$11 \dots h = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2, \quad t = \frac{v_0}{g} + \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} + \frac{2h}{g}}, \quad v = \sqrt{v_0^2 + 2hg}$$

Die zweite, für unauflösbare Wurzel der quadratischen Gleichung, $t = \frac{v_0}{g} - \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} + \frac{2h}{g}}$, hat dem obigen Fall eine mechanische Bedeutung. (Sie gibt nämlich negative Zeit an (welche negativ ist d. h. vor dem Beginn der betrachteten Bewegung liegt), zu welcher man den Körper von der Fußoberfläche aus fallen lassen muß, um ihn zur Zeit $t = 0$ (im Anfang der betrachteten Bewegung) in der Höhe h mit der Geschwindigkeit v_0 antreffen zu lassen.)

Die Gleichungen 9. 10 zeigen, daß der Körper, bei beliebigem Anfangsgeschwindigkeit, zum Aufsteigen genau dieselbe Zeit bedarf, wie zum Sinken; und daß der Körper seinen höchsten Ort genau mit denselben, also entgegengesetzten gerichteten Geschwindigkeit wieder erreicht, mit welcher er ihn verlassen hatte. Es ergibt sich ferner, daß die Bewegungen des Aufsteigens und Fallens überaus in ganz symmetrischer Weise verlaufen, so daß sämtliche Geschwindigkeiten an den nämlichen Orten bei dem fallenden Bewegung wiederkehren, nur eben in umgekehrter Reihenfolge, nur in entgegengesetztem Sinne.



Dasselbe ergibt die Bestimmung der Geschwindigkeitcurve, welche, nachdem sie sich von der negativen Seite der Abscissa genähert und im Augenblicke der höchsten Stellung dieselbe geschnitten, sich sodann in der selben Weise oberhalb von ihr entfaltet, wie sie sich zuvor unterhalb genähert hatte.

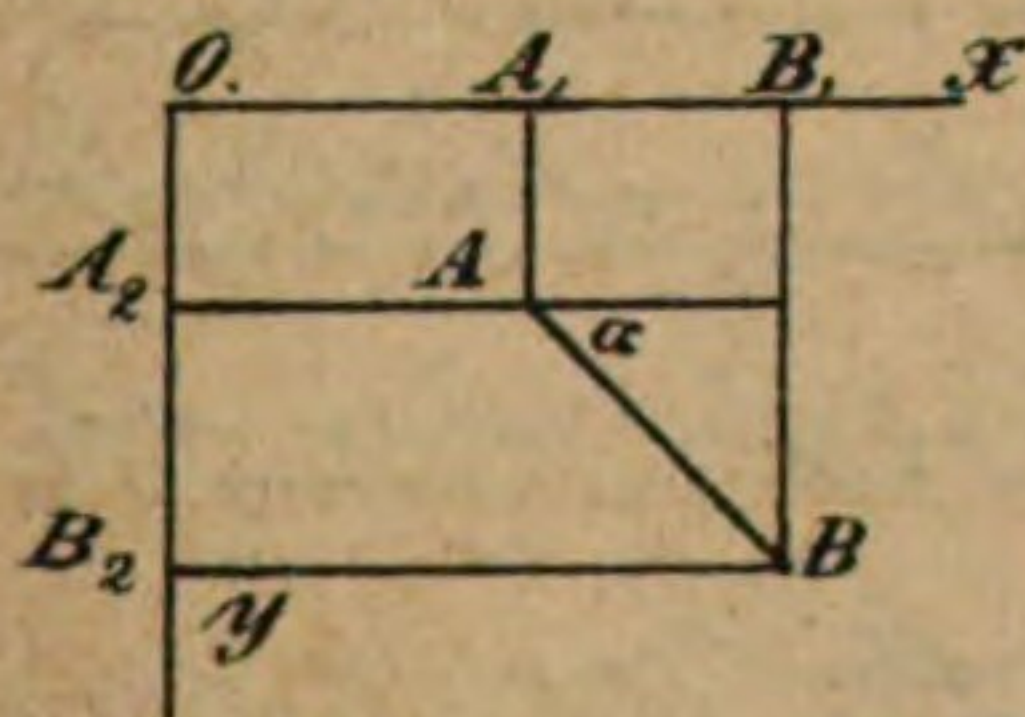
Die der Abscissa genähert und im Augenblicke der höchsten Stellung dieselbe geschnitten, sich sodann in der selben Weise oberhalb von ihr entfaltet, wie sie sich zuvor unterhalb genähert hatte.

§. 4. Herlegung und Zusammensetzung der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen.

Es ist natürlich, die Bewegung eines Punktes, welcher sich irgendwo in einer verticalen Ebene bewegt, auf den Beschleunigungen abzusätzen, welche derselbe in horizontaler und verticaler Richtung erleidet.

Mit anderen Worten: wir denken uns statt des Punktes selbst die Projectionen desselben auf eine horizontale und verticale Linie und substituiren der beliebigen Bewegung des Punktes die geradlinigen Bewegungen seiner Projectionen auf zwei gegeneinander senkrechten Linien. Zudem wir daher diese Operation der zufälligen Bestimmungen von horizontal und vertical entkleiden, können wir zwei irgendwo in der Ebene der Bewegung gegen einander senkrechte Gerade zur Abfassung der Bewegung verwenden.

Es seien die Coordinatachsen Ox , Oy zwei solche Geraden.



Während der Punkt sich wirklich mit der Geschwindigkeit v auf der Strecke AB hin- und herbewegt, in einer Richtung, welche gegen die Axe Ox den Winkel α bildet, durchläuft seine Projection

auf die Ox Axe die Strecke $A_1B_1 = AB \cdot \cos \alpha$, und seine Projection auf die Oy Axe die Strecke $A_2B_2 = AB \cdot \sin \alpha$. In allen diese Strecken mit gleichförmigen Geschwindigkeiten durchlaufen werden und alle in der nämlichen Zeit, so müssen die Geschwindigkeiten sich wie die durchlaufenden Strecken verhalten, d. h. die Geschwindigkeiten der Projectionen müssen gegeben sein durch die Gleichungen:

$$u = v \cos \alpha \quad v = v \sin \alpha$$

Es sind also die Gesammtheiten der Projectionen der
Projectionen der wirklichen Gesammtheit gleich.

Umgekehrt bestimmen sich, wenn die Gesammtheiten der
 Projectionen gegeben sind, die absolute Gesammtheit
 und die Richtung derselben aus 12. durch die Gleichungen:

$$13 \quad - \quad - \quad - \quad v = \sqrt{u^2 + v^2} \quad \text{tg } \alpha = \frac{v}{u}$$

Diese Bedingungen erlangen eine sehr ausgedehnte Wich-
 tigkeit, wenn man denselben Zusätze hinzufügt, welche,
 wie wir sehen, wohl am ehesten als Naturgesetze
 hingestellt werden. Es sind diese:

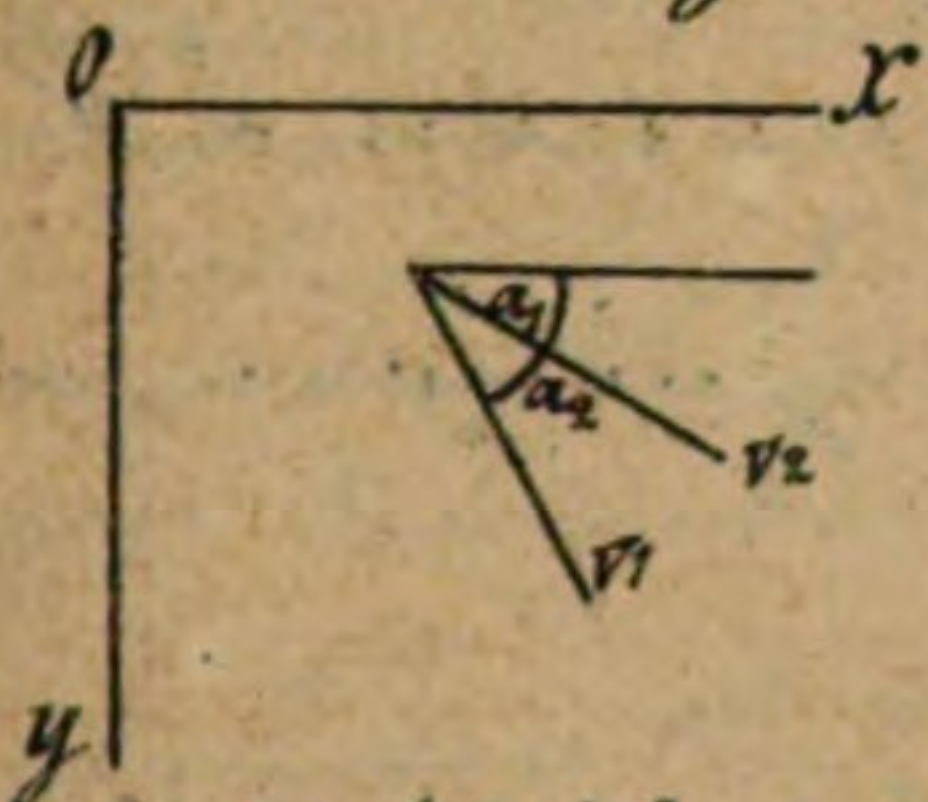
1, Wenn zwei gesammte Körper in einem Punkte gleich-
 zeitig zwei Gesammtheiten in Richtung der nämlichen
 geraden Linie zu erhalten bestrebt sind, so erhält der
 Punkt in der That eine Gesammtheit, welche der al-
 gebaischen Summe jener beiden gleich ist.

2, Wenn dagegen die Richtungen jener Gesammtheit-
 keiten gegen einander senkrecht sind, so bewegt sich der Punkt
 so, daß seine Projectionen nach diesen Richtungen jener
 Gesammtheiten entsprechen.

Es ist ferner vollkommen gleichgültig, ob man eine
 einzige Körper wirksam denkt, welche dem Punkte seine
 vorher bewegung mittheilt, oder zwei Körper, welche die
 projectirten Bewegungen hervorufen, und man kann
 ohne Weiteres das Eine für das Andere mit Nutzen annehmen.

Ist zu Hilfe genommen, kann man nunmehr leicht die Größe und Richtung der Gesammtgeschwindigkeit angeben, welche ein Punkt in der Ebene unter dem Einflusse eines beliebigzahligen Systems von Kräftepaaren annimmt. Es seien die Kräfte dasjenige Kräftepaar zukommenden Einzelgeschwindigkeiten $v_1, v_2, \dots, v_n$; die Richtungen derselben mögen mit der X Axe die Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ bilden.

Für diese Geschwindigkeiten kann man nach dem zweiten



Satzge entstanden denken durch das gleichzeitige Einwirken der projectirten Geschwindigkeiten, so daß man an Stelle

des wirklichen Geschwindigkeitssystems die beiden Systeme

$$v_1 \cos \alpha_1, \quad v_2 \cos \alpha_2, \quad \dots, \quad v_n \cos \alpha_n$$

$$v_1 \sin \alpha_1, \quad v_2 \sin \alpha_2, \quad \dots, \quad v_n \sin \alpha_n$$

setzen darf, von denen das erste in die Richtung der OX Axe, und das in die Richtung der OY Axe fällt. Nach dem ersten Satze aber werden die resultirenden Geschwindigkeiten des projectirten durch die algebraischen Summen

$$u = v_1 \cos \alpha_1 + v_2 \cos \alpha_2 + \dots + v_n \cos \alpha_n$$

$$14 \quad v = v_1 \sin \alpha_1 + v_2 \sin \alpha_2 + \dots + v_n \sin \alpha_n$$

ausgedrückt, und es werden, wiederum nach dem zweiten Satze, Größe und Richtung der wirklichen Geschwindigkeit so dem gegeben durch die Formeln

$$15 \quad v \cos \alpha = u \quad v \sin \alpha = v$$

undurch man für die Größe der resultierenden Geschwindigkeit
kann aufstellt:

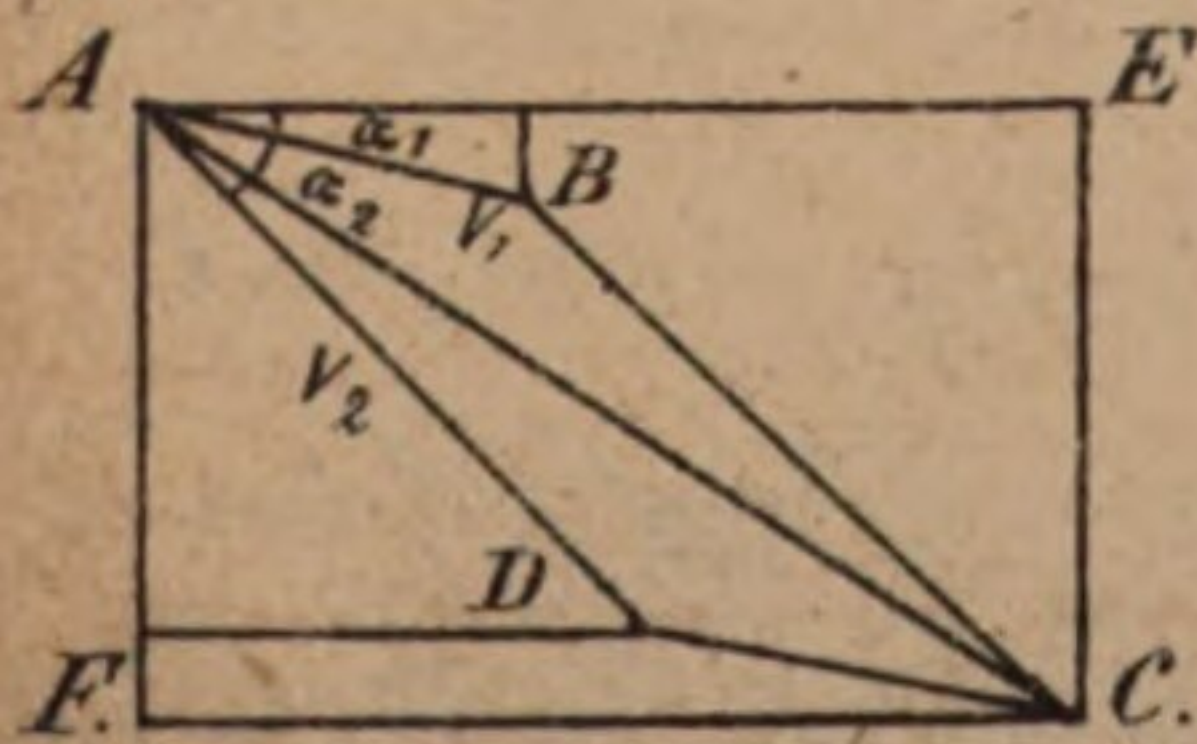
$$16 \quad V = \sqrt{(V_1 \cos \alpha_1 + V_2 \cos \alpha_2 + \dots)^2 + (V_1 \sin \alpha_1 + V_2 \sin \alpha_2 + \dots)^2}$$

und für den Winkel α , welche ihre Richtung gegen die X -Achse bildet:

$$17 \quad \text{tg } \alpha = \frac{V_1 \sin \alpha_1 + V_2 \sin \alpha_2 + \dots}{V_1 \cos \alpha_1 + V_2 \cos \alpha_2 + \dots}$$

Diese Formeln sind sehr geeignet, zur Berechnung der resultierenden Geschwindigkeit, welche einem gegebenen System von Geschwindigkeiten zukommt. Jedoch wird es zweckmäßiger sein, die folgende geometrische Betrachtung hinzuzufügen, welche zur Construction derselben führt.

Betrachten wir zunächst nur zwei gleichzeitig mit gleicher Geschwindigkeit, so zeigt die Figur, daß die resul-



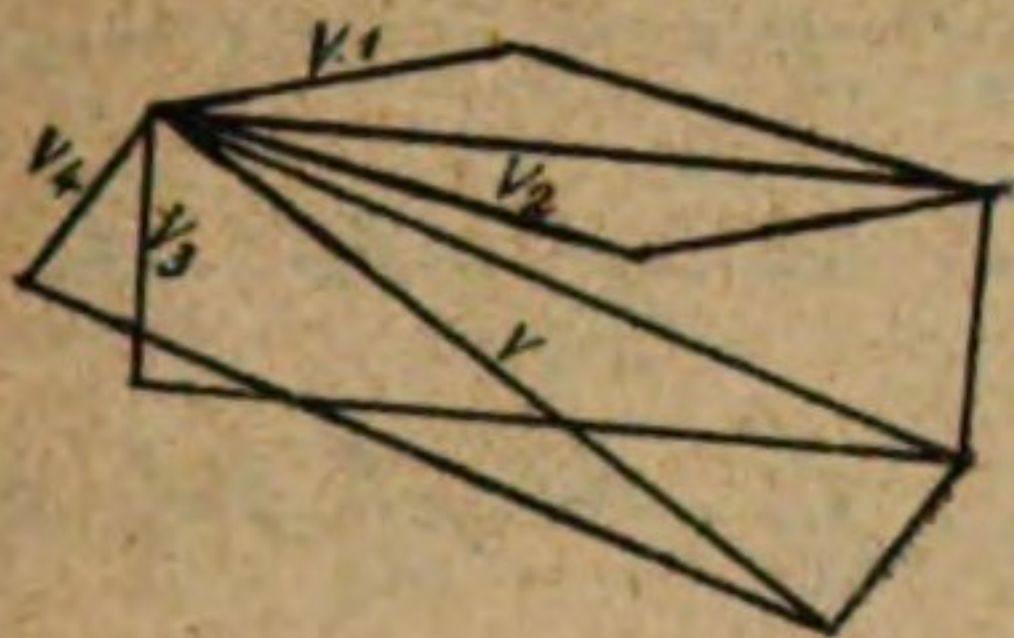
tirende Geschwindigkeit der Größe und
Richtung nach mit der Diagonale des
Parallelogramms bestimmt, welches
aus den componirenden Geschwindigkeiten

gebildet wird. Denn in der That findet sich ⁱⁿ der betrachteten
Figur:

$$18 \quad AE = V_1 \cos \alpha_1 + V_2 \cos \alpha_2 = u \quad AF = V_1 \sin \alpha_1 + V_2 \sin \alpha_2 = v$$

sind die Projectionen der resultierenden Geschwindigkeit, was
mit den Formeln 44. 15. übereinkommt.

Dieser Fortsetzung seiner Construction kann man also
die resultierende Geschwindigkeit eines beliebigen



Systeme finden, indem man zunächst die Resultante zweier Gefsamtheiten sucht, diese mit der Dritten verbindet u. s. w. eine Figur zeigt.

Die vorstehenden Betrachtungen sind keineswegs auf Zustände eingeschränkt, in welchen die vorstehenden Gefsamtheiten in Größe und Richtung constant bleiben. Vielmehr, da eben die Länge des unter dem Einfluß einer bestimmten Anzahl von Gefsamtheiten zuwiderliegenden Phases kleinerer Voranordnungen gemerkt wird, diese also auf unendlich klein sein kann, so gelten dieselben auch noch für sehr veränderliche Gefsamtheiten.

Die Veränderung einer Gefsamtheit aber besteht in nichts anderem, als daß während des kleinen Zeitintervalls τ dieselbe vermehrt wird um die Größe $g \cdot \tau$, wenn g die augenblickliche Beschleunigung derjenigen Einzelbewegung bedeutet, deren Gefsamtheit in Rede steht. Man kann also das Stück eines Systems von Beschleunigungen $g_1, g_2, \dots$, unterworfen ist, deren Richtungen durch die Winkel $\beta_1, \beta_2, \dots$ gegeben sind, so ist dies nicht anders, als daß nach Verlauf einer sehr kleinen Zeit τ den verschiedenen Gefsamtheiten das Stück nach der Gefsamtheit

$$g_1 \tau \quad g_2 \tau \quad \dots \quad g_n \tau$$

freizugeführt werden, jede in der ihr entgegengesetzten Richtung.
 Auf diese Gesetzmäßigkeit also muß man alle übrigen Betrachtungen gleichfalls anwenden können, oder auf, da der
 allen gemeinschaftliche Factor & Factor für Einfluß bleibt,
 auf die Bestimmungen selbst. (Und so gewinnt man das
 allgemeine Resultat:

Daß alle für die Zusammenfassung und Zerlegung der
Gesetzmäßigkeiten gültigen Formeln auch auf für
die Bestimmungen anwendbar sein müssen.

Ein System von Bestimmungen $g, g_2, \dots, g_n$, welche mit den
 & Axen bezüglich die Winkel bilden $\beta, \beta_2, \dots, \beta_n$, gilt für die Be-
 stimmungen des Projectionen des Punktes

$$\text{auf die } x \text{ Axe: } h = g, \cos \beta, + g_2 \cos \beta_2 \dots$$

$$19 \dots \text{auf die } y \text{ Axe: } k = g, \sin \beta, + g_2 \sin \beta_2 \dots$$

und sich den für die resultierende Bestimmung g und für den
 Winkel β , welche sie mit der x Axe bildet, die Gleichungen
 ergeben:

$$20 \dots \begin{array}{l} h = g \cos \beta \\ k = g \sin \beta \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{l} g = \sqrt{k^2 + h^2} \\ \operatorname{tg} \beta = \frac{k}{h} \end{array}$$

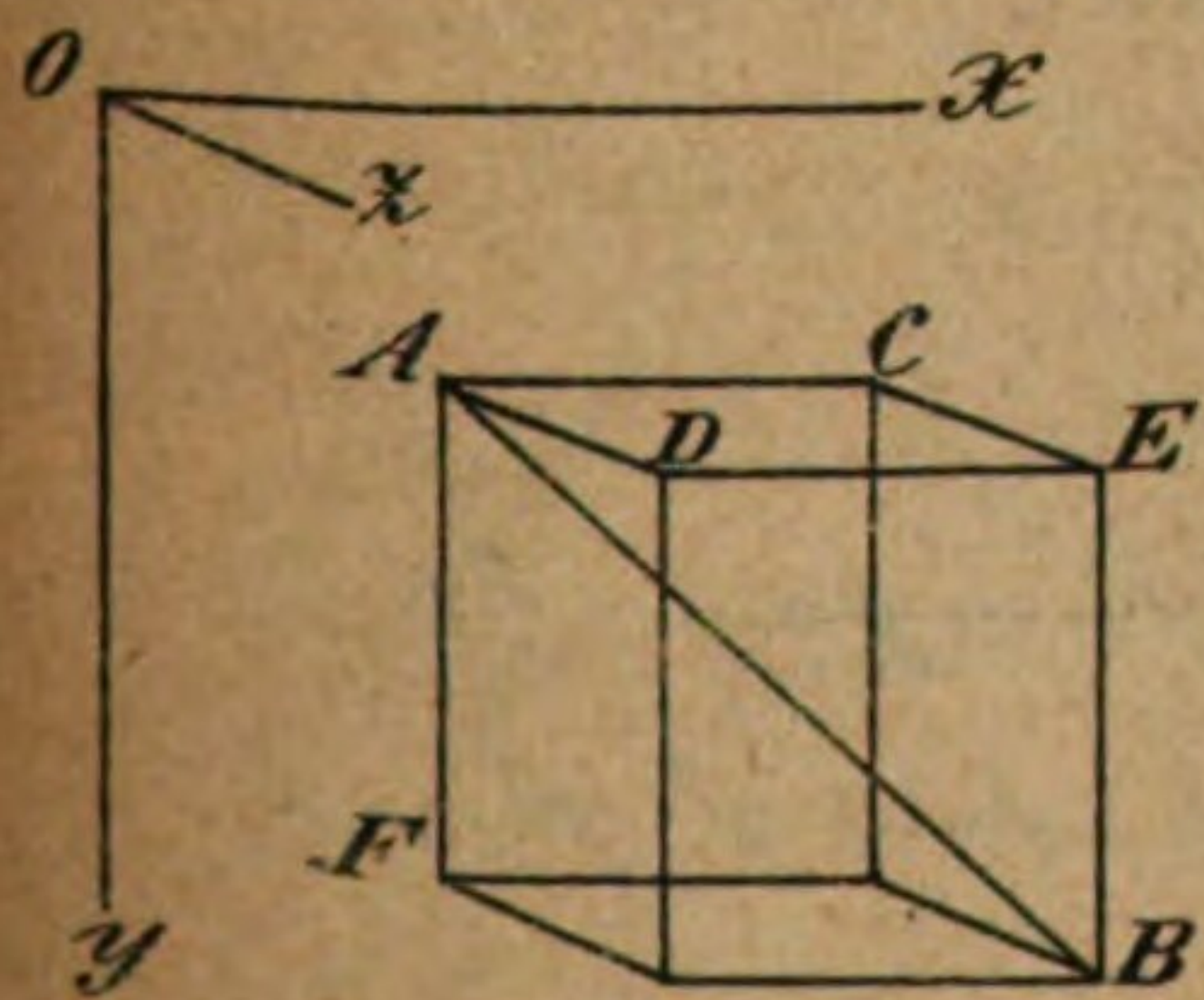
D. 5. Ausdehnung auf den Raum

Um den vorliegenden Betrachtungen tiefer zu kommen, ist all-
 gemeinlich zu geben, es mag sein, daß wir, die Raum-
 verhältnisse, zu den Aufstellungen des Raumes übergehen.

Man bestimt sich im Räumlichen ein P^3 aus drei gegen einander senkrechten Coordinatenebenen, oder dreier sich je zwei tiefer Augen gelegten Ebenen, um die Lage eines Punktes durch seine Abstände von den letzteren zu bestimmen.

Die Bestimmung eines Punktes im Räumlichen aber kann man den Beschaffenheit mit Hilfe der drei geradlinigen Bewegungen, welche seine Projectionen auf den Coordinatenebenen annehmen.

Um die Bewegungen zu ermitteln, welche sich zwischen den Gesammtheiten der Projectionen, und der Richtung und Größe der wirklichen Gesammtheit stellen, construiren wir uns bewegliche rechteckige Parallelogramme, deren Ecken den Coordinatenebenen parallel gehen, und deren Diagonale die Richtung der wirklichen Gesammtheit des Punktes ist. Als wenn der Punkt selbst mit seiner Gesammtheit v die



Punkte AB durchläuft, beschreiben sich seine Projectionen mit den Gesammtheiten u v w respective um die Punkte A , C , A , F , A , D den Coordinatenebenen parallel. Da alle diese Bewegungen in gleicher Zeit und mit gleichmäßigem Gesammtheit vor sich gehen,

so beschreiben sich die Gesammtheiten wie die durchlaufene Wege. Kennt man also α β γ die Winkel, welche die Linie AB gegen die Aye bildet, so hat man die Gleichungen (und den rechteckigen Dreiecken ABC , ABD , ABF)

$$AC = AB \cos \alpha \quad AF = AB \cos \beta \quad AD = AB \cos \gamma, \text{ oder}$$

$$21. \quad u = v \cos \alpha \quad v = v \cos \beta \quad w = v \cos \gamma.$$

Diese Gleichungen bestimmen also die jetzigen Gesammtheiten des Projectionen, welche, wie man sieht, auf sich den projectierten Gesammtheiten gleich sind. Bemerkt man aber noch, daß wir hier unmittelbar aus der ^{Formel} Frage ergibt:

$$AB^2 = AE^2 + EB^2 = AC^2 + CE^2 + EB^2,$$

so folgt, indem man sich der Linien der Figur die nun projectierten alten Gesammtheiten folgt:

$$22. \quad v^2 = u^2 + v^2 + w^2.$$

Es ist also auf sich, wie in der Ebene, das Quadrat der wirklichen Gesammtheit gleich der Summe der Quadrate der Gesammtheiten der Projectionen. Beiläufig folgt hier aus der Vergleichung der Formeln 21. 22. die Bemerkung, welche allgemein für die Winkel gilt, die eine Linie mit drei gegeneinander senkrechten Ebenen bildet:

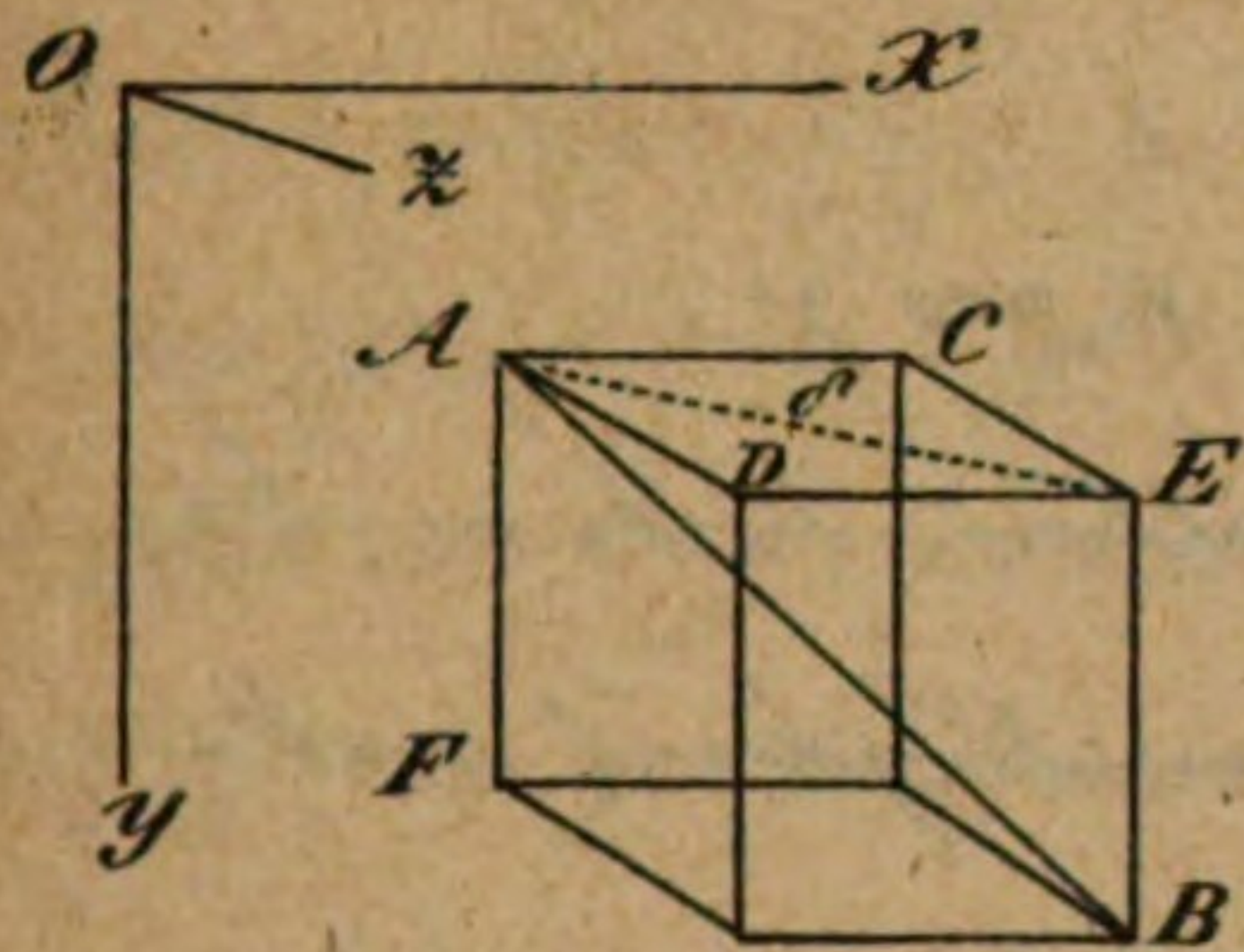
$$23. \quad \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Endlich aber ergeben sich die Winkelungen der Gleichungen 21., welche Richtung und Größe der Gesammtheit durch ihre Projectionen ausdrücken:

$$24. \quad v = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \quad \cos \alpha = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}, \quad \cos \beta = \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{w}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}$$

Um nun die Resultate eines beliebigen Systems von Gesammtheiten zu bestimmen, kann man verfahren wie folgt:

Es sei, indem wir wieder zu den früheren Figuren zurückkehren, AB die Richtung mit größter Neigung der Gefamtheit des Systems. Die Größe mag durch v bezeichnet sein; v bildet mit der Augenlinie Winkel α β γ . Die Richtung von v aber kann noch auf eine andere Weise bestimmt werden.



Legen wir durch AB eine Ebene, welche einer der Augen b. der OY parallel ist, die Ebene FAB ; in derselben bildet AB mit der zu OY parallelen Linie AF den Winkel β . Die Linie AE aber, in welcher diese Ebene die mit OZ parallele Ebene ACD schneidet, bildet mit AC den Winkel δ ; oder mit anderen Worten, die Projektion der Linie AB auf der Ebene OX bildet diesen Winkel mit der X Axe. Auf diese Weise ist die Richtung von AB vollkommen bestimmt.

Nun kann nach dem 2ten Satze des vorigen Abschnitts die Gefamtheit AB ersetzt werden durch die beiden Gefamtheiten

$$AF = v \cos \beta, \quad AE = v \sin \beta,$$

indem man die frühere Zerlegung auf die Ebene FAE anwendet. Aber AE kann wieder in der Ebene DAC ersetzt werden durch die Gefamtheiten

$$AC = AE \cos \delta = v \sin \beta \cos \delta, \quad AD = AE \sin \delta = v \sin \beta \sin \delta.$$

Und somit kann man auch die Gefamtheit AB ersetzen

Durch die drei auf den Coordinatenachsen gerichteten Gesammt-
Lichtstrahlen

$$25. \dots AC = v \sin \beta \cos \delta, \quad AF = v \cos \beta, \quad AD = v \sin \beta \sin \delta.$$

Dieses Linien stellen sich aber auch, mit Hilfe der recht-
winkligen Dreiecke ABC, ABF, ABD , und der Winkel
 α, β, γ , durch die Gleichungen dar:

$$26. \dots AC = v \cos \alpha, \quad AF = v \cos \beta, \quad AD = v \cos \gamma.$$

und indem man das trigonometrische Verhältniss dieser drei
Componenten gegen die gegebene Gesammtheit versteht,

so ist nicht ohne Interesse, die Gleichungen

$$27. \dots \cos \alpha = \sin \beta \cos \delta \quad \cos \gamma = \sin \beta \sin \delta$$

zu bemerken, welche aus der Vergleichung von 25. 26. ohne
Weitere folgen. Die geben den Zusammenhang zwischen den
beiden Bestimmungsarten an denen wir uns für die Richtung
des Linies AB bedient haben.

Es nun ein System von Gesammtheiten $v, v_2 \dots v_n$ ge-
geben, deren Richtungen mit den Axen bezüglich die Winkel
 $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \dots \alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ bilden, so fällt man nach
dem obigen die folgenden Reihe von Gesammtheitscomponenten:

$$\text{Nach der X Axe: } v, \cos \alpha, v_2 \cos \alpha_2 \dots v_n \cos \alpha_n,$$

$$\text{Nach der Y Axe: } v, \cos \beta, v_2 \cos \beta_2 \dots v_n \cos \beta_n,$$

$$\text{Nach der Z Axe: } v, \cos \gamma, v_2 \cos \gamma_2 \dots v_n \cos \gamma_n.$$

Es ist nun nach dem oben Satz das vorerwähnte erlaubt ist,
gleichgerichtete Gesammtheiten einfachlich zu addiren,

so können wir diese Systeme erhalten durch die Gesammtheit
 beiden in Richtung der Koordinatenachsen:

$$u = v_1 \cos \alpha_1 + v_2 \cos \alpha_2 + \dots + v_n \cos \alpha_n$$

$$v = v_1 \cos \beta_1 + v_2 \cos \beta_2 + \dots + v_n \cos \beta_n$$

$$w = v_1 \cos \gamma_1 + v_2 \cos \gamma_2 + \dots + v_n \cos \gamma_n$$

Denken wir uns diese Gesammtheiten durch Zerlegung
 einer Gesammtheit V entstanden, welche mit den Axen die
 Winkel $\alpha \beta \gamma$ bildet, so müssen nach 26 dieselben den Glei-
 chungen genügen:

$$29 \dots V \cos \alpha = u \quad V \cos \beta = v \quad V \cos \gamma = w,$$

oder es muß sein:

$$\cos \alpha = \frac{v_1 \cos \alpha_1 + v_2 \cos \alpha_2 + \dots}{V}, \cos \beta = \frac{v_1 \cos \beta_1 + v_2 \cos \beta_2 + \dots}{V}, \cos \gamma = \frac{v_1 \cos \gamma_1 + v_2 \cos \gamma_2 + \dots}{V}$$

$$V = \sqrt{\{(v_1 \cos \alpha_1 + v_2 \cos \alpha_2 + \dots)^2 + (v_1 \cos \beta_1 + v_2 \cos \beta_2 + \dots)^2 + (v_1 \cos \gamma_1 + v_2 \cos \gamma_2 + \dots)^2\}}$$

Es darf uns nicht wundern, daß diese Formeln auch für die
 Zerlegung in Komponenten der Bestimmungen gelten.
 Unter der Annahme dieser Gleichungen gesehen die
 ersten Elemente des Systems der relativen Bewegungen.
 Wenn zwei Punkte gleichzeitig bewegen, kann man
 nach der Bewegung fragen, welche der eine dieser Punkte
 dem andern gegenüber antzusehen scheint, diesen letzteren
 als festgesetzt. Man nennt diese Bewegung die relative Bewegung
 des einen Punktes in Bezug auf den zweiten.
 Man kann sich Frage dadurch lösen, daß man sich beiden
 Punkten eine gemeinschaftliche Bewegung vorstellt, welche

verleihe die Bewegung des zweiten gerade auf. Die relative Bewegung kann dadurch nicht geändert werden, aber da man den zweiten Punkt ruht, so wird die relative Bewegung derselben mit seinen absoluten Zusammenfällen. Betrachtet man daher den ersten Punkt mit den Geschwindigkeitskomponenten u, v, w , die anderen mit den Komponenten u, v, w , so muß man beiden die gemeinschaftlichen Geschwindigkeitskomponenten $-u, -v, -w$ zusetzen, um den zweiten ruht zu stellen. Der erste bewegt sich aber dann mit den Geschwindigkeiten

$$u - u, \quad v - v, \quad w - w,$$

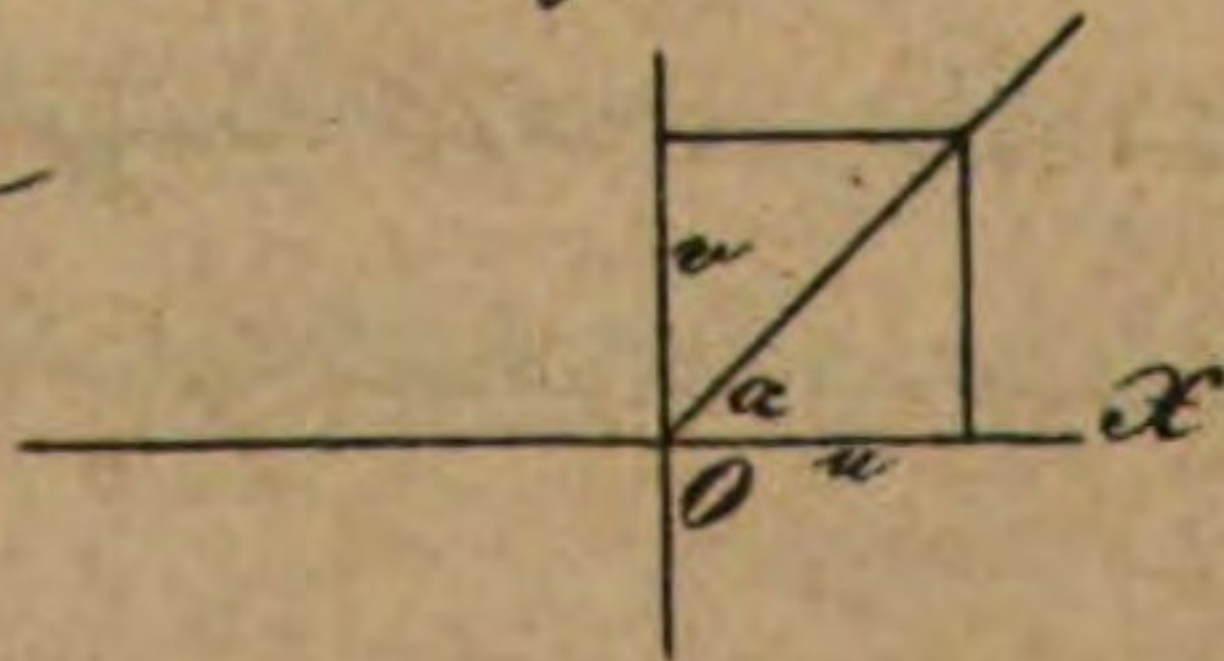
verleihe die Komponenten seiner relativen Bewegung darstellen.

Betrachte z. B. den ersten Punkt mit der constanten Geschwindigkeit u in der Richtung der X Axe, den zweiten mit der constanten Geschwindigkeit v in Richtung der Y Axe, beide zu gleicher Zeit von dem Anfangspunkte ausgehend; so nimmt der erste gegen den zweiten eine relative Geschwindigkeit an, deren Komponenten u und v sind. Die relative Coordinaten sind daher nach Verlauf der Zeit t

$$x = ut \quad \text{und} \quad y = -vt,$$

etc. der erste Punkt scheint sich mit der Geschwindigkeit $\sqrt{u^2 + v^2}$ auf einer geraden Linie zu bewegen, deren Gleichung ist $\frac{x}{u} + \frac{y}{v} = 0$, und verleihe mit der X Axe einen Winkel α bildet, für welchen

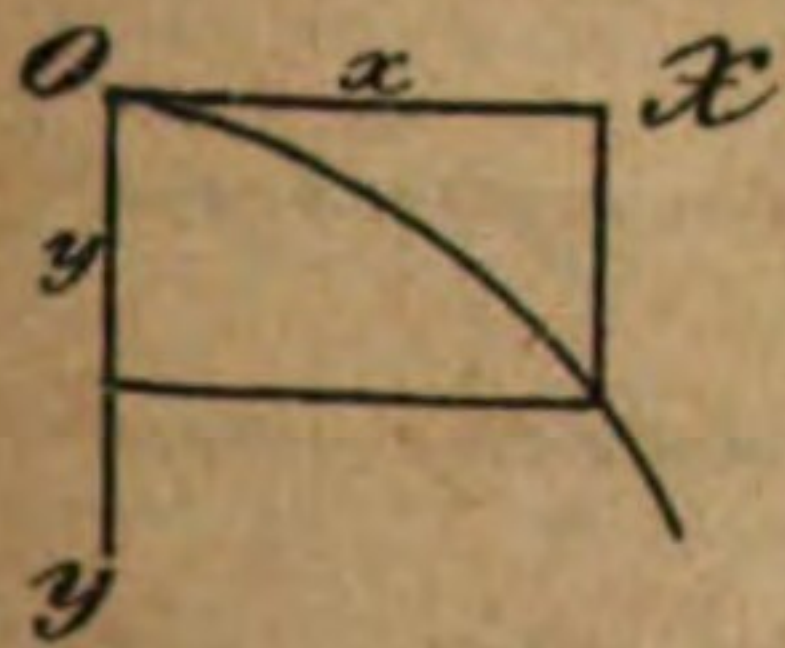
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v}{u}.$$



S. 6. Fallbewegung im Raum.

Ein Punkt, welcher einem System beliebig gewählter constanten Beschleunigungen unterworfen ist, kann also immer so angesehen werden, als befände er sich unter dem Einfluß einer einzigen constanten Beschleunigung, der Resultirenden. Nehmen wir die Richtung dieser Beschleunigung zu einer Axe der Coordinaten, so bewegt sich also die Projection des Punktes auf diese Linie mit gleichförmig beschleunigter Geschwindigkeit; die Projectionen aber auf den anderen Axen bewegen sich ohne alle Beschleunigung, also gleichförmig. Ja, wir können diese beiden gleichförmigen Bewegungen zu einer zusammenfassen, und mit der Richtung derselben die zweite Coordinatenaxe zusammen fallen lassen. Dann zeigt die Projection des Punktes auf die dritte Axe unabhängig seine Bewegung. Die ganze Bewegung ist also in der Ebene der ersten beiden Axen enthalten.

Als Beispiel dazu mag ein Körper dienen, welcher den Beschleunigung des Pfluges unterworfen, sich gleichzeitig horizontal gleichförmig fortbewegt, wie etwa der Kugel eines Geschützes. Die Y Axe sei vertical, nach unten gerichtet, die X Axe horizontal, O der Anfangspunkt der Bewegung. Die Geschwindigkeit u ist also constant; v dagegen, anfangs Null, dann wachsend; und nach den Gleichungen der gleich-



formigen und gleichförmig beschleunigten Bewegung (S. 1. S. 2.)
 Set man also

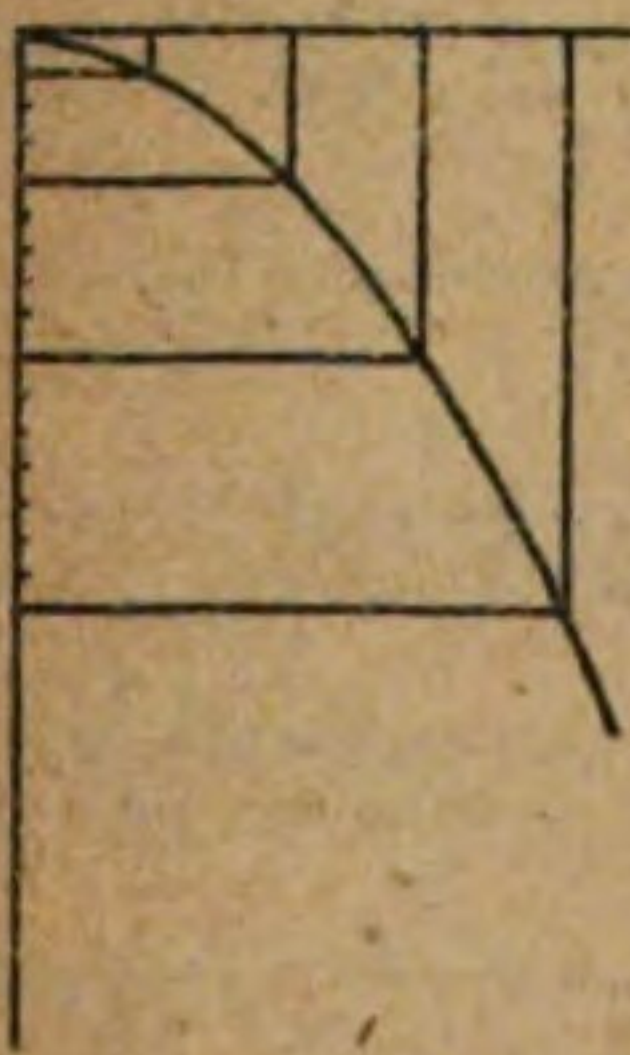
$$31 \dots u = 0 \quad v = gt$$

so wie für die zurückgelegten Wege der Projectionen:

$$32 \dots x = ct, \quad y = \frac{1}{2} gt^2.$$

Durch Elimination von t ergibt sich für x u. y die Gleichung
 welche die Lücke der Bewegung darstellt:

$$33 \dots x^2 = \frac{2c^2}{g} y$$



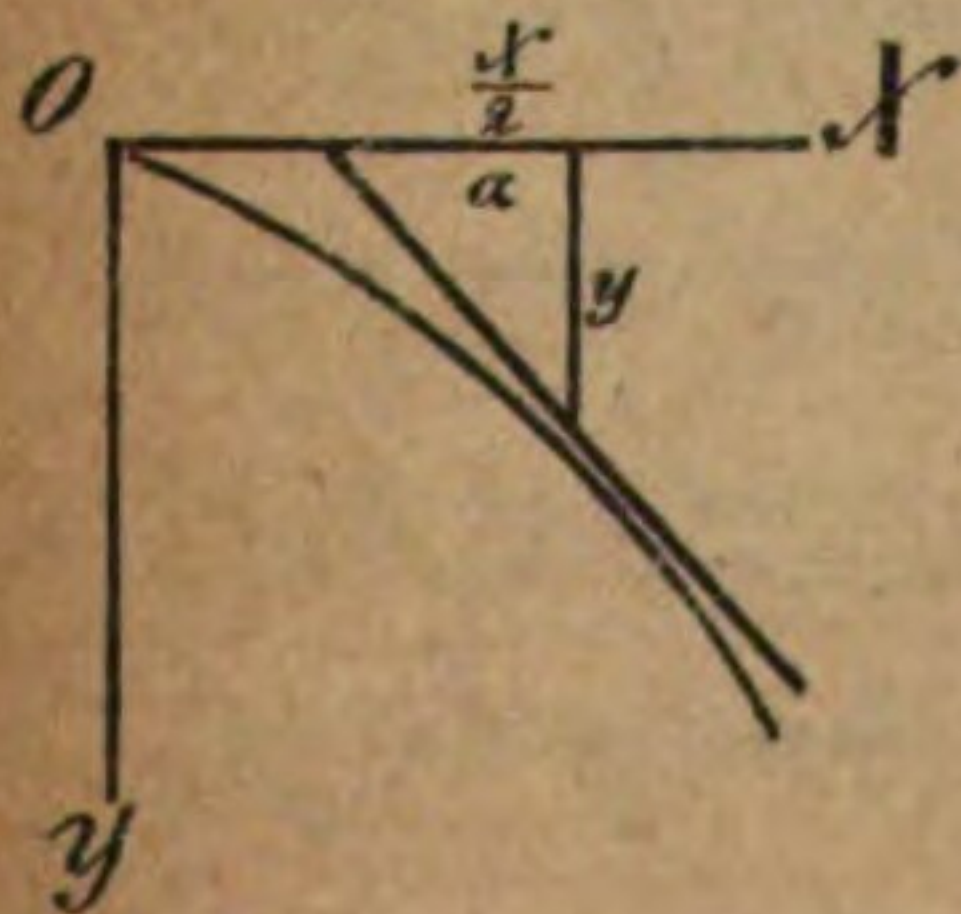
Man construirt dieselben aus Punkten, indem
 man auf der x Achse lauter gleiche Strecken c
 abträgt, auf der y Achse aber der Reihe nach
 die Strecken $\frac{g}{2}, \frac{g \cdot 4}{2} - \frac{g}{2} = \frac{3g}{2}, \frac{g \cdot 9}{2} - \frac{g \cdot 4}{2} = \frac{5g}{2}$ etc.,
 und nach man auf beiden Achsen Punkte ergiebt,

die den Werthen $t = 1, t = 2, \dots$ entsprechen. In zwei aufeinander
 folgende Punkten geben dann, indem man durch sie zu der x Achse
 Loten zieht, im Punkt derselben einen Punkt der Parabel.

Die augenblickliche Bewegungsgeschwindigkeit ist nach S. 4. 13.
 gegeben durch die Gleichung:

$$34 \dots t g d = \frac{v}{u} = \frac{gt}{c}.$$

Bemerkt man aber, daß dies auch nach 32. $= \frac{y}{x}$ so findet



man die einfache Construction der Bewegungsgeschwindigkeit, d. h. der Tangente an die Parabel, indem man nur die Mitte der x Ordinate mit dem Orte des Punktes zu verbinden muß.

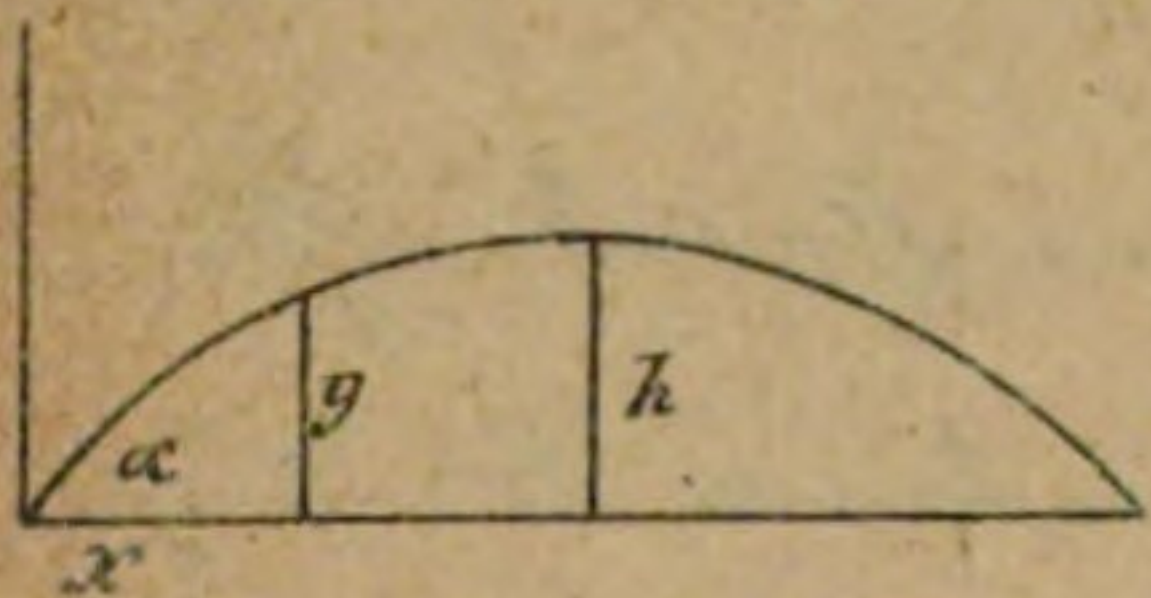
Die absolute Geschwindigkeit sei nach §. 4. B. den Werth:

$$35 \dots = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{c^2 + g^2 t^2}.$$

Die Gleichungen 35. 34. zeigen mit einer sehr merkwürdigen Geschwindigkeit, deren Richtung, die sehr merkwürdigen α , die der Horizontalen immer mehr wächst, ohne jemals wirklich vertical zu werden, da erst bei $t = \infty$ auf $t g d = \infty$ hin kam. Man kann aber die Lücke auf unendlich verlängern und Punkte betrachten, für welche t negativ ist, d. h. die Punkte vorwärts, wenn es sich schon in Bewegung befindet, oder in einer horizontalen Richtung bewegt. Diese entsprechen dem Aufsteigen des Punktes, welches mit dem Nichtaufsteigen vollkommen symmetrisch von sich geht: — In der That, wenn wir t in $-t$ übergehen lassen, so verwandelt sich u in $-u$, v in $-v$, während y und z unverändert bleiben. Die Lücke ist daher gegen die Y Achse symmetrisch, 0 den Mittel, die Geschwindigkeiten in gleichen Abständen vom Mittel nach beiden Seiten dieselben.

Betrachten wir den Fall, wo ein Körper mit beliebiger Richtung und Geschwindigkeit am Festen aufgesetzt wird. Betrachten wir den Anfangszustand des Körpers nach demjenigen Punkte des Festen, aus welchem die Bewegung ausgeht. Die Anfangsgeschwindigkeit sei v_0 und bilde einen Winkel α gegen die Horizontale. Es wird die Anfangsgeschwindigkeit in horizontaler Richtung

$v_0 \cos \alpha$, in horizontaler Richtung $v_0 \sin \alpha$; die Beschleunigung,



die Beschleunigung, welcher die v jetzt entspricht, genügt, ist, wie man erwarten kann. Man hat also die Geschwindigkeiten:

$$36 \dots u = v_0 \cos \alpha \quad v = v_0 \sin \alpha - g t,$$

und die Projektionen des Wurflanges x und y sind:

$$37 \dots x = v_0 \cos \alpha \cdot t \quad y = v_0 \sin \alpha \cdot t - g \frac{t^2}{2}.$$

Der Scheitel der Parabel tritt ein, wenn die Vertikalgeschwindigkeit v verschwindet, also bei $t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$, und in der Höhe:

$$38 \dots h = v_0 \sin \alpha \cdot t - g \frac{t^2}{2} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Der Körper erreicht den Erdboden wieder, wo $y = 0$ oder

$$39 \dots t = \frac{2 v_0 \sin \alpha}{g}, \quad x = v_0 \cos \alpha \cdot t = \frac{2 v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

so daß $\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$ die ganze Breite des Wurfs angibt, $\frac{2 v_0 \sin \alpha}{g}$

die Dauer der ganzen Bewegung. Die Breite des Wurfs ist am größten für $\alpha = 45^\circ$, wo $\sin 2\alpha = 1$.

Es stellt sich hier die Aufgabe dar, den Winkel zu bestimmen, unter welchem ein Geschoss mit gegebenem Anfangsgeschwindigkeit geschossen sein muß, um ein gewisses Ziel zu treffen. Es sei x_0 die horizontale Entfernung des Ziels. So die Höhe desselben. Dann müssen, damit das Ziel erreicht werde, die Gleichungen erfüllt sein.

$$40 \dots x_0 = v_0 \cos \alpha \cdot t \quad y_0 = + v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{g t^2}{2}.$$

Durch Elimination von t erhält man dann die Gleichung

$$41 \dots y_0 = x_0 \tan \alpha - \frac{g x_0^2}{2 v_0^2} (\tan^2 \alpha + 1), \text{ und erhält:}$$

$$42 \quad \text{---} \quad \text{tg } \alpha = \frac{v_0^2}{g x_0} - \sqrt{\frac{v_0^4}{g^2 x_0^2} - 1 - \frac{2 v_0^2 y_0}{g x_0^2}}.$$

Diese Gleichung ergibt zwei Werte für α , sobald der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen positiv ist, dagegen keinen, wenn er negativ, also die Wurzel imaginär wird. Im ersten Fall kann also der Punkt auf doppelter Weise, beim Abspringen oder beim Aufspringen getroffen werden, mittelst eines Pfeiles oder einer fliegenden Kugel, im zweiten Fall überfliegt nicht. Die Gerade bildet eine Kurve Linie, für welche die Wurzelgröße Null ist; wenn das Ziel auf ihr liegt, ist es nur auf eine Weise erreichbar, die Lücke selbst kommt die erreichbaren Punkte von denjenigen, welche mit der gegebenen Anfangsgeschwindigkeit nicht mehr zu erreichen sind. Die Gleichung dieser Lücke wird, indem die Wurzelgröße Null setzt.

$$43 \quad \text{---} \quad x_0^2 = \frac{2 v_0^2}{g} \left(\frac{v_0^2}{2g} - y_0 \right);$$

reist dann die Gleichung einer Parabel, deren Scheitel der vertikalen Richtung des Pfeiles in die Höhe gehenden Körper entspricht, und deren Brennpunkt der Anfangspunkt des Geschosses ist. Für alle Punkte dieser Lücke ist die Linie der vertikalen Richtung mit der absoluten Entfernung



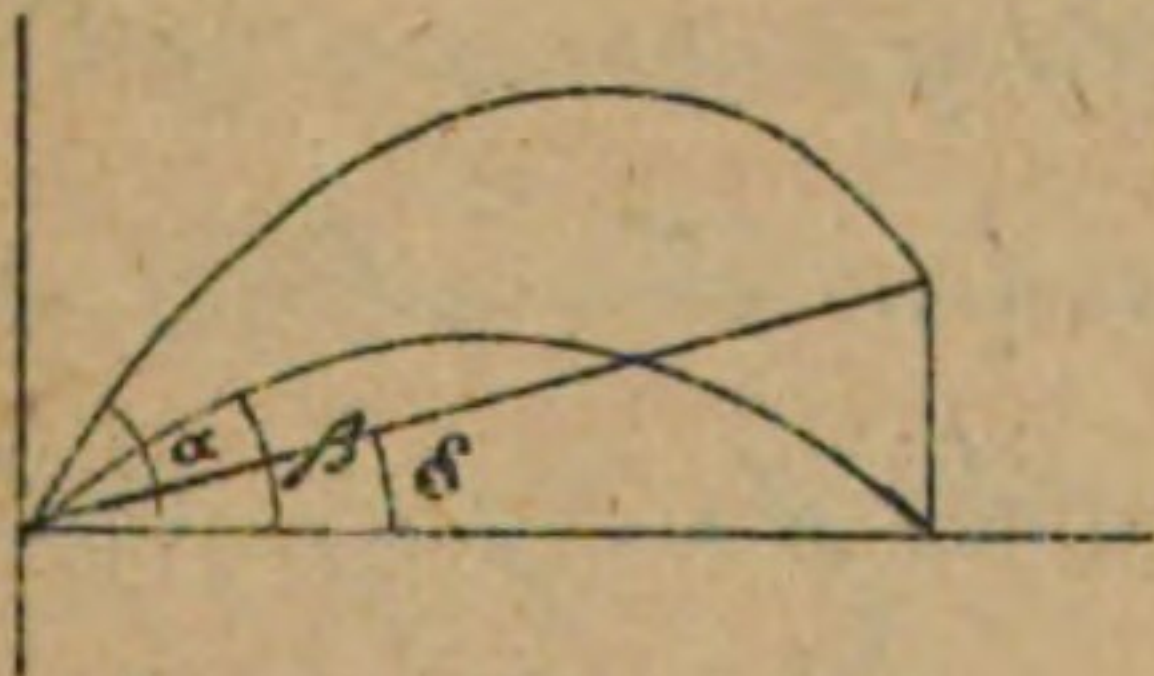
zum Anfangspunkt einer constanten Gesch. v_0^2 gleich. Die Ebene der Horizontalen unter 45° wird überfliegen werden

die doppelte Beschleunigung der Kugel zu erreichen. Wir füllt sämtliche Wurfpasenale in und wird nun jeden derselben betrachtet. Es bemerkt man, daß die Gleichung 42. eine einfache Gestalt annimmt, wenn man statt δ den Winkel α und statt β den Winkel β derjenigen Parabel bezieht, welche den Fußpunkt des gegebenen Pfeiles trifft. Dann ist Winkel β ist bestimmt durch die Gleichungen:

$$x_0 = v_0 \cos \beta \cdot t \quad 0 = v_0 \sin \beta \cdot t - \frac{gt^2}{2}, \text{ daher}$$

$$\frac{v_0^2}{gx_0} = \frac{1}{\sin 2\beta}, \text{ und also ist}$$

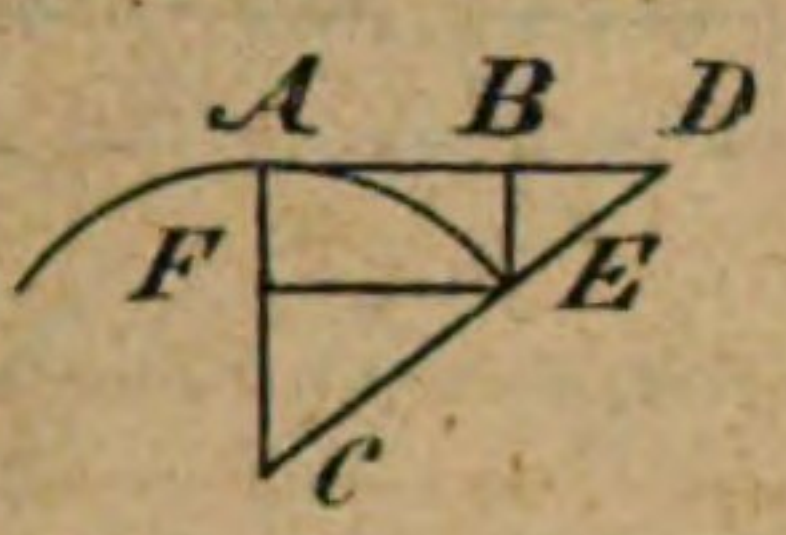
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1 \pm \sqrt{\cos^2 2\beta - \sin 4\beta \operatorname{tg} \delta}}{\sin 2\beta}$$



§. 7. Gleichförmige Bewegung auf einem Kreise

Ein anderes Beispiel der Bewegung in der Ebene bildet die Bewegung eines Punktes, welcher, durch einen Faden an einem festen Punkt befestigt, mit gleichförmiger Drehwindigkeit auf dem Kreise herumherumgeht. Da der Punkt auf nicht geradlinig herumläuft, so muß er Beschleunigungen unterworfen sein; und da seine Drehwindigkeit sich nicht ändert, so kann die auf ihn wirkende Beschleunigung nicht anders, als gegen seinen ^{heute} momentanen Bewegungslaufpunkt hin, d. h. wirksam in der Richtung des Fadenes. Diese Beschleunigung soll bestimmt werden.

r die Länge des Faden, v die Geschwindigkeit des Punktes, g die gesuchte Beschleunigung.



Der Punkt würde, wenn A ausgeht, mit der Geschwindigkeit v in einer sehr kleinen Zeit τ die kleine Strecke $AB = v\tau$ zurücklegen.

Zugleich legt er aber unter dem Einfluß der Beschleunigung g die Strecke $AF = \frac{1}{2} g \tau^2$ zurück; und da er bis am Ende dieser Zeit τ in E befinden muß, so muß die Gleichung bestehen: $r^2 = CF^2 + FE^2 = (r - \frac{g\tau^2}{2})^2 + v^2 \tau^2$, oder auch

$$rg - \frac{g^2 \tau^2}{4} = v^2$$

Da der zeitliche Teil τ infinitesimal klein ist, und also τ^2 sich von Null nur unendlich wenig unterscheidet, so bleibt

$$44 \quad \quad \quad g = \frac{v^2}{r}$$

Die Zeit, welche der Punkt zu einem Umlauf gebraucht, ist, da er während dieser Zeit T mit gleichförmiger Geschwindigkeit v den Weg $2\pi r$ zurücklegt, durch die Gleichung gegeben:

$$45 \quad \quad \quad 2\pi r = vT. \quad T = \frac{2\pi r}{v}$$

Man pflegt unter dergleichen Rotationsbewegungen nicht nur die Geschwindigkeit des Punktes selbst darzustellen, sondern auch die Geschwindigkeit, welche ein Punkt besitzen würde, welcher, an dem Radius 1, gleichförmig mit dem gegebenen Winkel umläuft. Diese Geschwindigkeit so nennt

man die Winkelgeschwindigkeit der rotirenden Bewegung,
da die Umläufe in gleichen Zeiten erfolgen, so müssen
die Geschwindigkeiten sich wie die Radien
verhalten, oder es muß sein

$$46 \quad \omega = \frac{v}{r}.$$

Setzt man für v & T dann auf die Ausdrücke:

$$47 \quad v = r \cdot \omega \quad g = \omega^2 r \quad T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Endlich drückt man die Bewegung aus durch die Anzahl
der Umläufe in der Minute. Ist dieselbe n , so muß also
die Zeit nT von n Umläufen = 60 Sekunden sein, oder

$$48 \quad T = \frac{60}{n}.$$

Woraus sich weiter die Resultate ergeben:

$$49 \quad \omega = \frac{2\pi n}{60} \quad v = \frac{2\pi n r}{60} \quad g = \frac{4\pi^2 n^2 r}{3600}$$

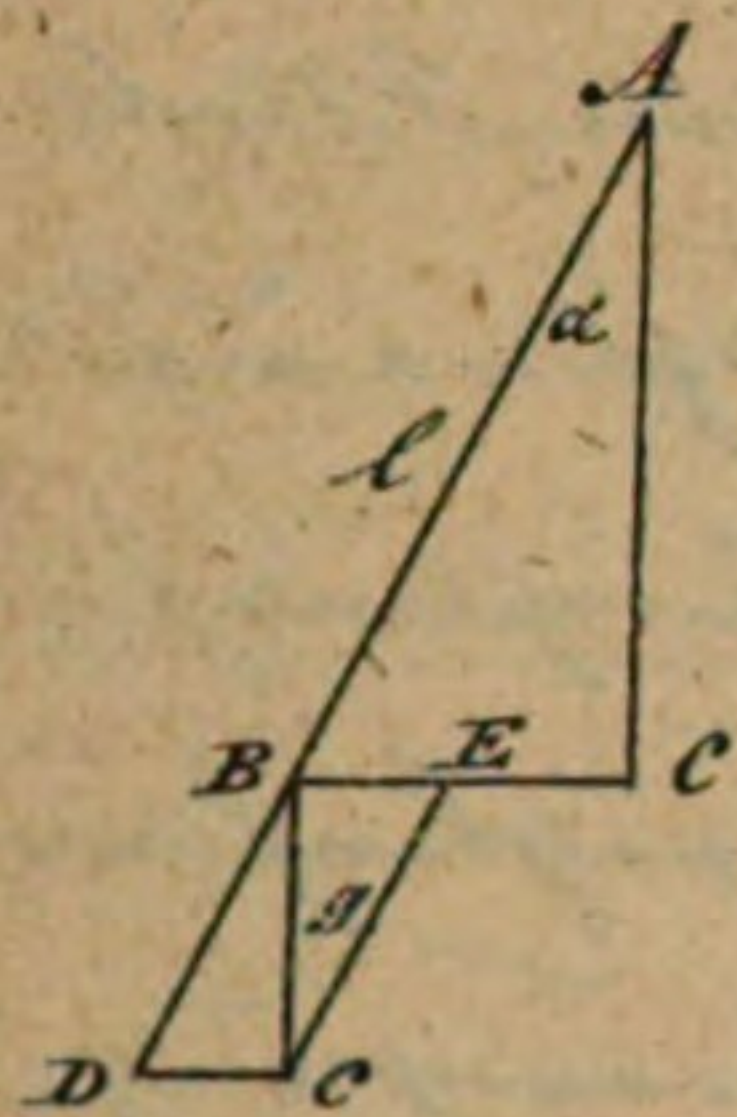
Der Beschleunigung, mit welcher der Punkt sich den Faden
zu bewegen bestrebt ist, mit welcher der Gegenbeschleunigung des
Fadens $\frac{v^2}{r}$ gleich sein muß, set man sich Namen den Centri-
fugalkbeschleunigung gegeben. Wenn in der That der Punkt
in solcher Weise den Faden zu bewegen strebt, so darf man
dennoch nicht die Beschleunigung Namen geben, als würde es, bei
plötzlicher Festhalten des Fadens, durch diese Beschleunigung
aus seiner tangentialen Richtung abgelenkt werden.

Dann wäre es erforderlich sein, daß diese Beschleunigung
eine endliche Geschwindigkeit hervorbringe könnte, welche
bei uns momentane Wirkbarkeit (in der letzten

Richtung des Faden) offenbar unmöglich ist.

Einige Beispiele mögen die Anwendung dieser Gesetze erläutern:

Ein Körper ist an einem Faden befestigt, dessen Länge gleich l . Der Faden ist an einem natürlichen natürlichen Punkt um einen Winkel α entfernt ist, und



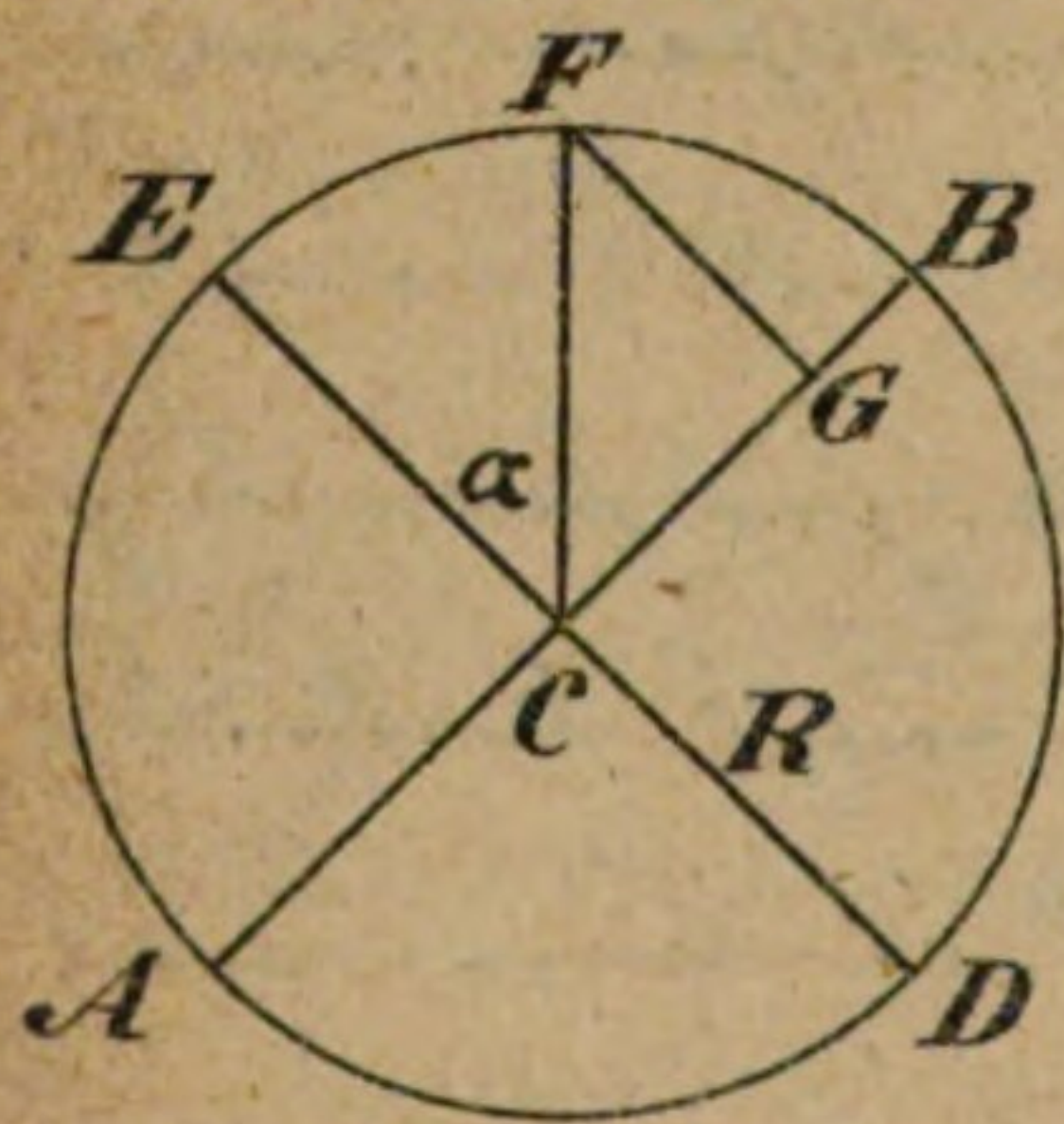
dem Körper eine horizontale Geschwindigkeit mitgeteilt. Wie groß muß dieser sein, damit der Körper sich in einem horizontalen Kreis bewegen?

Der Körper bewegt sich also mit einer Geschwindigkeit v in einem Kreis, dessen Radius $= l \sin \alpha$. Es wird sich in der Richtung dieses Radius also eine Tangentialgeschwindigkeit $\frac{v^2}{l \sin \alpha}$ ergeben, d. h. der Körper muß durch eine Beschleunigung von diesem Werte in der Richtung jenseit Radius gegen C zurückgehalten werden, um in der Kreisbewegung zu verharren. Diese Beschleunigung aber kann nur durch die Faser hervorgerufen werden. Folglich wird also die Beschleunigung g derselben nach den Linien BD , BE , so wie der Winkel zwischen den Faden AB , so auch, dessen Wert $g \cdot \tan \alpha$ ist, mit der gesuchten Beschleunigung werden; d. h. es muß sein

$$g \tan \alpha = \frac{v^2}{l \sin \alpha}$$

$$v = \sqrt{gl \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha}}$$

Ein anderes Beispiel gibt die Raumtheorie des Cyfres
mit der Kugel nach dem Äquator zu, welche zum Theil
in diesen Betrachtungen schon geordnet findet. Betrachten
wir die Erde als Kugel; AB sei ihre Äq., ED der Äquator.



Ein Punkt in E , unter der Breite α ,
erleidet durch die Anziehung der Erde
eine Beschleunigung g nach dem Mit-
telpunkte zu. Aber er bewegt sich
in einem Kreise, dessen Radius EG gleich
 $R \cos \alpha$, und daher erfolgt er zugleich in

der Richtung von G nach F eine Centrifugalkraftbeschleunigung,
 $= \frac{v^2}{R \cos \alpha}$; oder wenn T die Umlaufzeit der Erde ist,

$$= \frac{4\pi^2 R \cos \alpha}{T^2}$$

zerlegen wir diese Beschleunigung nach dem Radius CF
und senkrecht dagegen, so ergibt sich ihr tangentialer Radius
die Tangente $\frac{4\pi^2 R \cos^2 \alpha}{T^2}$;

und da diese der Beschleunigung des Cyfres entgegenwirkt,
so vertheilt sich die letztere auf:

$$g - \frac{4\pi^2 R \cos^2 \alpha}{T^2};$$

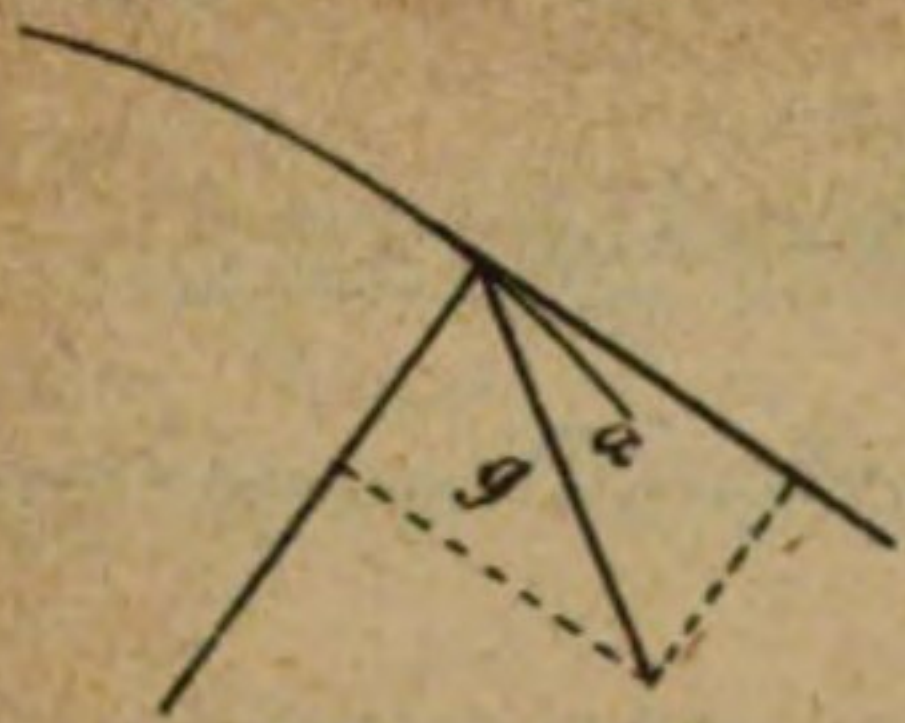
ein Restant, welches, am Pole mit g übereinstimmend, nach dem
Äquator zu abnimmt, um dort seinen geringsten Werth

$$g - \frac{4\pi^2 R}{T^2}$$

anzunehmen.

§. 8. Tangentiale und normale Beschleunigung

Ein Punkt, welcher einer beliebig bewegten Beschleunigung folgend, sich im Raum bewegt, beschreibt im Allgemeinen eine Kurve doppelter Krümmung, d. h. er bewegt sich fortwährend nicht nur in einer Richtung, sondern auch die Ebene seiner Bahn, indem er im Allgemeinen sich in nicht mehr als zwei aufeinander folgenden Zeitelamenten in einer Ebene befindet. In dieser Ebene, welche man die Osculationsebene der Bewegungsbewegung nennt, sind welche durch zwei aufeinander folgenden Elementen der Bahn gelegt wird, liegt auch immer die augenblickliche Richtung der Beschleunigung. Da die Geschwindigkeit der zweiten Zeitelaments sich durch die Zusammensetzung der Beschleunigung mit der Geschwindigkeit des vorausgehenden Augenblickes bestimmt, so muß sie in der Ebene, welche durch die Richtungen der beiden letzteren gelegt wird, und in welcher die Zusammensetzung nur sich gibt, enthalten sein. Bildet also die augenblickliche Richtung der Geschwindigkeit mit der Beschleunigung φ einen Winkel α , so kann man die Beschleunigung nach der Richtung der Bewegung und senkrecht gegen dieselbe, oder tangential und normal gegen die Bewegungsbewegung zerlegen. Man erhält man die tangentiale Beschleunigung gleich $g \cos \alpha$, und die Normale Beschleunigung $= g \sin \alpha$. Von diesen beiden



kann offenbar die erste nur dazu dienen, die
 Geschwindigkeit des Punktes zu verändern.
 Es entsteht die Frage, was geschieht durch die
 Gravität? Man kann zwar aufeinanderfolgende Elemente
 der Kurve als einen Kreis ungefährig betrachten; den
 Mittelpunkt desselben liegt dann offenbar auf der Nor-
 male, welche wir betrachten; und sein Radius wird
 größer oder kleiner sein, je nachdem die Kurve in dem
 betrachteten Punkte mehr oder mehr gekrümmt ist.
 Man setz deswegen diesen Kreis als Maß für die Krüm-
 mung der Kurve genommen, und ist der Krümmungskreis
 genannt, seinen Radius aber den Krümmungsradius der
 Kurve. Wir wissen aber nach der in S. 7. angestellten
 Betrachtung, daß die Normalebefleunigung, unter deren
 Einfluß ein Punkt sich gleichförmig im Kreise bewegt
 $= \frac{v^2}{r}$ ist. Im voraus soll verändert sich die Geschwindig-
 keit des Punktes, so lange er auf dem Kreise bleibt, in
 der That nur unendlich wenig. Ist also v die Geschwin-
 digkeit des Punktes, r sein Krümmungsradius für den
 betrachteten Augenblick, so muß für die Normalebefleu-
 nigung die Gleichung gelten

$$50 \quad \frac{v^2}{r} = g \sin a.$$

Die Normalebefleunigung dient also dazu, die Krümmung
der Kurve zu bestimmen, auf welcher der Punkt sich bewegt;

da sich für den Krümmungshalbmesser des Pfades ergibt:

$$51 \quad \dots \quad r = \frac{v^2}{g \sin a}$$

Dies gilt einerseits die Bestimmung des Krümmungshalbmessers an, und kann andererseits, bei bekannter Bewegung, zur Bestimmung des Krümmungshalbmessers dienen. (Es findet man aus den Formeln des §. 6 den Krümmungshalbmesser der Parabel. Wenn es sich um die Bestimmung des Pfades, $v^2 = c^2 + g^2 t^2$, $a = 90^\circ$ und also

$$\sin a = \frac{c}{\sqrt{c^2 + g^2 t^2}}$$

Es wird mithin

$$r = \frac{(\sqrt{c^2 + g^2 t^2})^3}{gc}; \quad = \frac{(\sqrt{c^2 + 2gy})^3}{gc};$$

oder wenn $\frac{c^2}{g} = p$ gesetzt wird, so daß $x^2 = 2py$ die Gleichung der Parabel ist (§. 6. 33.):

$$r = \frac{(\sqrt{p+2y})^3}{\sqrt{p}}$$

S. 9 Kraft. Masse Arbeit

Man bezeichnet durch Kraft eine Ursache, welche einem Körper eine Beschleunigung erteilen kann, mag ihm dieselbe eine Bewegung zu Folge haben, oder durch andere Kräfte unwirksam gemacht werden.

Der Umstand, daß die uns überflüssigen Beschleunigungen durch einen Stoß oder zug hervorgerufen werden, welcher auf den bewegten Körper unmittelbar einwirkt, hat sehr geführt, daselbst je die Kraft dadurch zu messen, daß man stellt, wie ein Stoß einen Stoß von gegebener Größe sublimiert. Ein solches Stoß wird unter anderem das Gewicht eines Körpers aus. Es findet zugleich die Ausbreitung leicht geteilt, so daß man die Größe einer Kraft durch dasjenige Gewicht aus, welches auf einer Unterlage den nämlichen Stoß auslöst, welches die Kraft dem aus ihr angegebenen Körper mitteilt. Die Einheit der Kraft ist der Stoß, welches ein Gewicht von 1 Kilogramm auslöst; die Größen der Kräfte sind also in Kilogrammen bestimmt.

Nur durch Kräfte können Beschleunigungen erzeugt werden, d. h. nur durch sie kann die Bewegung eines Körpers sich verändern. Ein materieller Punkt, welcher keinerlei Einflüssen unterworfen ist, zeigt daher eine unveränderliche Bewegung; so ist er entweder in Ruhe (wenn er Anfangs in Ruhe war) oder er bewegt sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit geradlinig vorwärts.

Man bezeichnet durch Leichtigkeit diese Eigenschaft des Körpers, ohne äußeren Einfluß in dem angegebenen Zustande zu verharren.

2.

die Größe der Beschleunigung, welche einer gegebenen Kraft einem Körper mittheilt, hängt sowohl von der Größe der Kraft ab, als von der Quantität des Materials, welche in dem Körper enthalten ist, und welche die Beschleunigung erfahren soll. Man nennt die Quantität des Materials, welche ein Körper enthält, die Masse desselben. Betrachten wir zuerst f. diejenige Beschleunigung, welche die (vorläufig noch beliebige) Masseneinheit durch die Kraft von 1 Kilo-gramm erfährt, so theilt dieselbe Kraft offenbar einem Körper, welcher die m-fache Quantität Material enthält, nur den m-ten Theil jener Beschleunigung, d. h. die Masse m erfährt die Beschleunigung $\frac{f}{m}$. Ist endlich die angewandte Kraft gleich P Kilogramm, so theilt sie der (Masse m) die Beschleunigung mit

$$1 \dots \dots P = \frac{fP}{m}.$$

Nennen wir diese Gleichung mit derjenigen Kraft an, mit welcher die Erde einen an ihrer Oberfläche befindlichen Körper anzieht, die Gewichtskraft. Der Druck, welchen diese Kraft auf den Körper ausübt, ist nicht anders als sein Gewicht G. Wir wissen aber auch, daß dieselbe für eine Beschleunigung $g = g$, 81 Meter theilt. Es folgt daher aus 1 die folgende Gleichung:

$$2 \dots \dots g = \frac{f}{m} G \quad \text{mit aus 1. 2. zusammen}$$

$$3 \dots \dots P = \frac{gP}{g}.$$

Diese Formel bietet die einfachste Art dar, die Beschleunigung zu bestimmen. Dieselbe ist von der nach willkürlicher Zeit Finde-
lungig gemacht. Die Gleichung 2 aber kann zur Bestimmung

der Masse kennen, kann es nicht nach derselben

$$4 \quad m = \frac{f G}{g}$$

Die Kraft f , welche von der Erde zur bestimmenden Massenwirkung abh. hängt, wird gewöhnlich gleich 1 gesetzt, so daß derjenige Körper als Masseneinheit gewählt ist, dessen Gewicht = 9,81 Kilogramm ist. Hauptsächlich hat sich durch die später zu erörternde Erklärung der lebendigen Kraft bewegen geschlossen, $m = \frac{G}{2g}$, also $f = \frac{1}{2}$ angenommen.

Der Masseneinheit hat man keine besondere Benennung gegeben. Einmal selbst darf man aber die Masse nicht allein nach Gewichtseinheiten messen, sondern die Masseneinheit muß als eine eigentümliche festgesetzt werden.

Die Masse eines Körpers hängt nicht bloß von dem Volumen desselben ab, sondern ist gleich dem Volumen, multipliziert mit derjenigen Kraft, welche die Masse der Volumeneinheit angibt. Diese ist für verschiedene Körper verschieden, und heißt den Namen der Dichtigkeit. Man kann bezeichnen man sich leicht, um die Dichtigkeit der verschiedenen Körper zu erhalten, in der Regel einen, anderen Stoff, der spezifischen Gewicht. Dieses gibt an wie viel mal dieser im gegebenen Körper ist als Wasser; d. h. wie viel mal schwerer ein Kubikmeter von dem Körper des Wassers ist, als ein Kubikmeter Wasser.

Ist q die Dichtigkeit des Körpers, q , die eines gegebenen Körpers, ρ sein spezifisches Gewicht, so ist also

$$5 \quad q = \rho q ;$$

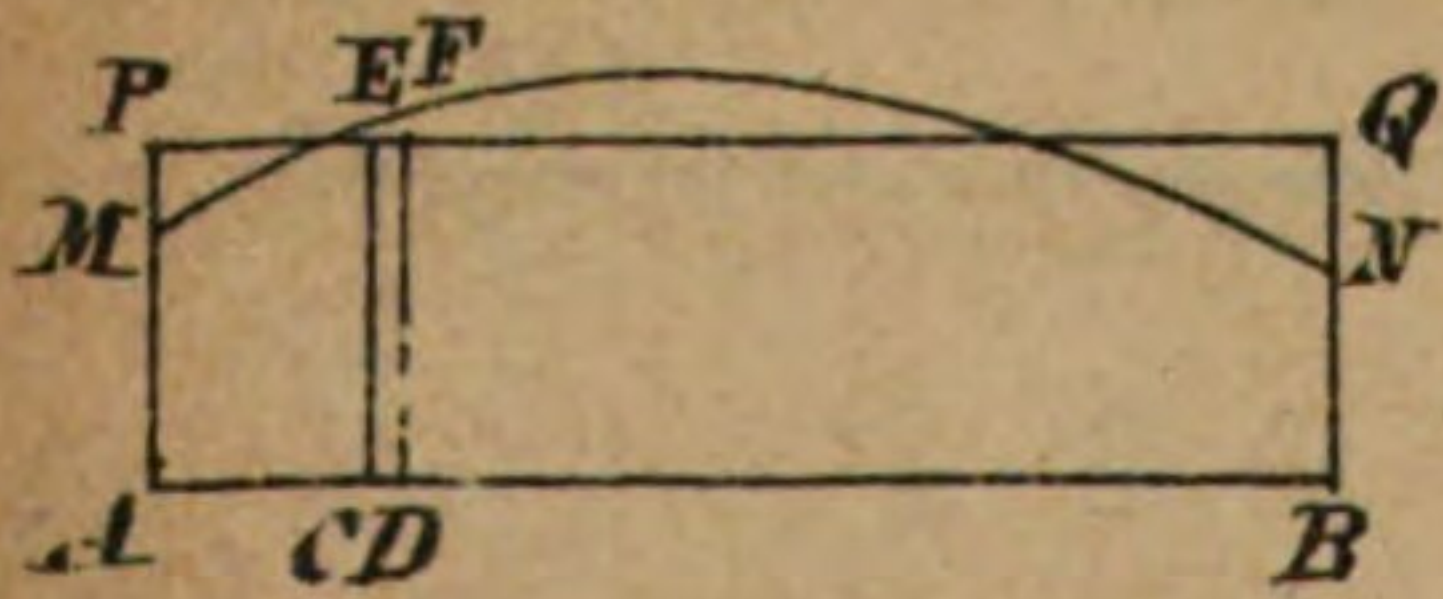
und wenn v sein Volumen, m seine Masse, G sein Gewicht bezeichnen, so ist 6 --- $m = q, v, \quad G = \frac{q q, v}{f}$

Das Gewicht eines Kubikfußes Wasser = 1000. Pilsen, so folgt aus der letzten Gleichung, wenn $f =$ angenommen wird

$$f = \dots \quad g = \frac{1000}{g} = 101,95$$

Auf den Begriff der Leistung wird hierin in einem etwas andern Sinne gesetzt. -

Die Wirkbarkeit einer unerschöpflichen Kraft wird dargestellt durch das Produkt der Kraft mit dem Wege, welchen der bewegte Körper unter ihrem Einflusse zurückgelegt hat. Man nennt dieses Produkt die Wirkungsgröße oder die Arbeit der Kraft auf dem zurückgelegten Wege. Ist die Kraft erschöpflich, so darf man die Veranschaulichung einer sehr kleinen Wegstrecke als constant ansehen, und die gesamte Arbeit wird also dargestellt durch die Fläche aller Weglemente, die mit der zu entsprechenden Größe der Kraft. Man kann sich die Berechnung der Arbeit eines äolischen Motors, wie oben (S. 2) bei der Darstellung des zurückgelegten Weges. für die constante Kraft ist die Arbeit gegeben durch das Produkt, gebildet aus der Länge des Weges und einer Linie, welche die Größe der Kraft darstellt. Ist aber die Kraft erschöpflich, AB der zurückgelegte Weg, so trägt man über jedem Punkte des Weges senkrecht die Linie an, welche die Größe der Kraft in dem entsprechenden Augenblicke andeutet.



Die Endpunkte der senkrechten bilden eine Kurve; aber das kleine Rechteck $CDFE$ gibt nach dem eben Gesagten die Maßzahl des

Die Endpunkte der senkrechten bilden eine Kurve; aber das kleine Rechteck $CDFE$ gibt nach dem eben Gesagten die Maßzahl des

Weglement CD geleistete Arbeit an (um so größer, je kleiner CD)
 entspricht die Größe der Längs $AMNB$ die gesamte, längs des Wegs
 AB geleistete Arbeit. Man stellt man diese Größe in der Rechteck
 $APQB$, so ist AP die mittlere Kraft, d. h. diejenige Kraft, welche, den
 Weg AB fortwährend gleichmäßig zurück, die nämliche Arbeit ge-
 leistet hätte, wie die gegebene ungleichmäßige Kraft.

§. 11. Zerlegung und Zusammensetzung der Kräfte.

Da die Größen der Kräfte mit den durch sie hervorgerufenen Beschleunigungen unmittelbar proportional sind (§. 9. 2), so gelten offenbar alle von den Bestimmungen gegebenen Sätze und Functionen auch wohl für Kräfte. So ist es so, wenn die Längen des in §. 4. 5. für die Bestimmungen gegebenen Functionen mit ihr Verhältniß von 1 zu $\frac{a}{g}$ vergrößern, die Formeln aber mit $\frac{a}{g}$ multipliciren, um dieselben so gleich in die aufgestellten Functionen und Formeln für die Kräfte übergehen zu lassen.

Zwei der Kräfte sind (Richtung nach gegebenen Kräfte, welche auf denselben Punkt wirken, können also durch eine einzige Kraft ersetzt werden, welche der Größe nach gleich der Diagonale des aus ihnen gebildeten Parallelogramms dargestellt ist. Umgekehrt kann man eine Kraft durch zwei andere ersetzen, welche Seiten eines Parallelogramms sind, dessen Diagonale die gegebene.

Es ist sehr leicht aus dem Parallelogramm der Kräfte. Indem man sich auf die successiven Zusammensetzung mehrerer Kräfte, mögen sie in einer Ebene liegen oder nicht, annimmt, gelangt man leicht zur

Bestimmung des resultirenden Kräfte, welche gegeben ist, ein beliebiges System von Kräften zu erfolgen. Um die Richtung u. Größe derselben allgemein festzustellen, kann man sich der Formeln bedienen, welche in I. 5. für ein beliebiges System von Geradenkräften mit Bestimmungungen aufgestellt sind, und welche wir bemerkt, die unmittelbar an Anwendung auf die Kräfte gestatten. Geben wir daher ein beliebiges System von Kräften $P, P \dots P_n$, welche irgendwo im Räume gerichtet, den nämlichen Punkt angreifen. Ein Winkel, welche ihre Richtung mit den Coordinatenachsen bilden, seien:

$$\alpha, \beta, \gamma, \quad \alpha_2 \beta_2 \gamma_2 \quad \dots \quad \alpha_n \beta_n \gamma_n.$$

Nach I. 5. kann man dann dieses System durch drei Kräfte X, Y, Z ersetzen, welche die Richtung der entsprechenden Coordinatenachsen haben, und den Componenten der Projectionen der gegebenen Kräfte auf diese Achsen bezüglich gleich sind:

$$X = P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + \dots + P_n \cos \alpha_n$$

$$8 \dots Y = P_1 \cos \beta_1 + P_2 \cos \beta_2 + \dots + P_n \cos \beta_n$$

$$Z = P_1 \cos \gamma_1 + P_2 \cos \gamma_2 + \dots + P_n \cos \gamma_n$$

bezeichnen wir nun durch P die gesuchte Resultirende des Systems, so ist die Richtung durch die Winkel α, β, γ , so wie

$$9 \dots P \cos \alpha = X \quad P \cos \beta = Y \quad P \cos \gamma = Z$$

und durch Auflösung dieser Gleichungen:

$$10 \dots P = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad \cos \alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \quad \cos \beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$$

liegen sämtliche Kräfte in einer Ebene, z. B. in der Ebene XY , so fällt die Kraft Z aus, und statt $\cos \beta \cos \beta$, etc. erhält man $\sin \alpha, \sin \alpha_1 \dots$

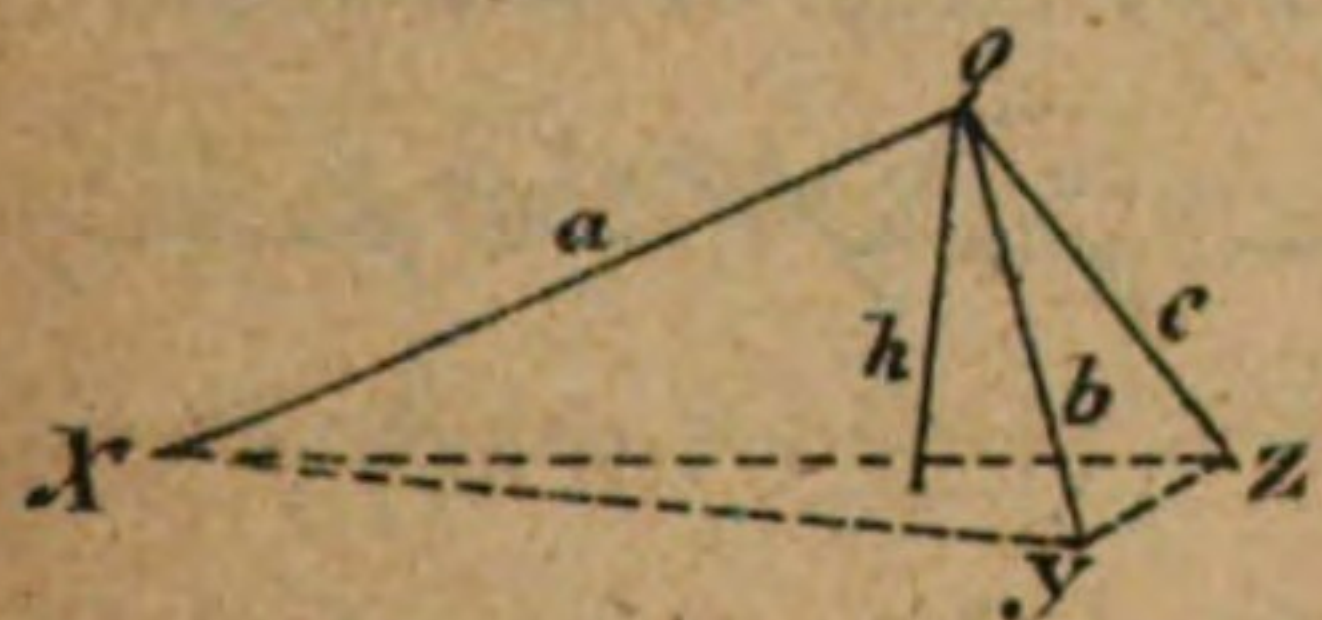
und somit die Formeln:

$$10 \dots X = P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + \dots + P_n \cos \alpha_n = P \cos \alpha$$

$$11 \dots Y = P_1 \sin \alpha_1 + P_2 \sin \alpha_2 + \dots + P_n \sin \alpha_n = P \sin \alpha, \text{ mit kurz Auf-} \\ \text{lösung}$$

$$12 \dots P = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{Y}{X}.$$

für Beispiel wenigstens für die Annäherung der richtigen Lösung mag
sich eine Stelle finden. Ein Gestell, bestehend aus drei ungleichen Füßen, welche
unter rechten Winkeln zusammenstoßen, ist, wie aufgestellt, mit der Spitze
nach oben, und befestigt durch ein Gewicht G . Es soll der Druck gefunden



werden, welchen die Gewicht in diese Richtung jeder
einzelnen Fußes enthält. Seien die Längen der Füße
bezüglich $= a, b, c$. Man kann sie zu Koordinaten an-
nehmen, und den Anfangspunkt der Koordinaten in

die Spitze verlegen. Dann sind also nur die Winkel zu bestimmen, welche die
Verticals mit den Ären bildet, und sie in dieser Richtung wirkende Kraft
 G auf die Äre zu projicieren. Sind also α, β, γ die Winkel, welche die
Verticals mit den Ären bildet, h die Höhe der Spitze über dem Boden, so hat
man die Gleichungen:

$$\cos \alpha = \frac{h}{a}, \quad \cos \beta = \frac{h}{b}, \quad \cos \gamma = \frac{h}{c};$$

und wegen der Gleichung $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$:

$$\frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Es sind die Randkräfte in Richtung der einzelnen Ären:

$$X = G \cos \alpha = \frac{Gh}{a} = \frac{\frac{G}{a}}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}$$

$$Y = G \cos \beta = \frac{Gh}{b} = \frac{\frac{G}{b}}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}$$

$$Z = G \cos \gamma = \frac{Gh}{c} = \frac{\frac{G}{c}}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}$$

Die Punkte x existieren von Längen der Punkte umgekehrt proportional,
so daß also der längste den geringsten Druck anfügt, der kürzeste
den größten. Sind sämtliche Kräfte von gleicher Länge, so hat man

$$x = y = z = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

S. 11. Von dem Gleichgewicht der Kräfte, welche auf einen Punkt wirken.

Wenn im Kräftesystem sich in der Ruhe befindet, daß der angegriffene
Punkt keinerlei Beschleunigung erfährt, daß er also entweder in Ruhe
bleibt oder sich gleichförmig und geradlinig bewegt, so fallen die Kräfte
auf das Gleichgewicht. Die resultierende Kraft, welche im Punkte
ist, allein das System zu versetzen, muß dann gleich Null sein,
und also nach S. 10. 8. 9. muß man haben:

$$13. \quad x = 0 \quad y = 0 \quad z = 0, \text{ oder}$$

$$P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + \dots + P_n \cos \alpha_n = 0$$

$$14. \quad P_1 \cos \beta_1 + P_2 \cos \beta_2 + \dots + P_n \cos \beta_n = 0$$

$$P_1 \cos \gamma_1 + P_2 \cos \gamma_2 + \dots + P_n \cos \gamma_n = 0$$

Wenn die Kräfte gegeben, aber mit unveränderter Lage des Punktes
selbst wesentlich ist, für ob der Größe oder der Richtung nach, so sind die
drei Gleichungen, welche zur Bestimmung der Gleichgewichtslage des
Punktes, d. h. seiner Coordinaten x, y, z dienen können. Liegen sämtliche Kräfte
in einer Ebene, der Ebene der x, y , so hat man nur die beiden Gleichungen

$$P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + \dots + P_n \cos \alpha_n = 0,$$

$$P_1 \sin \alpha_1 + P_2 \sin \alpha_2 + \dots + P_n \sin \alpha_n = 0;$$

welche ausreichen, wenn die P und α unveränderlich sind, dazu dienen können,
die Lage des Punktes zu bestimmen, in welcher er sich im Gleichgewicht befindet.

Man untersteht sich hier mit unferer Betrachtung eines Punktes
 insofern sich derselbe dem Einfluß der auf ihn wirkenden Kräfte un-
 gesichert überlassen kann, oder auch wenn derselbe gesichert ist, ge-
 wisse Stellen des Raumes einzuweichen. Diese Hinderung kann entweder
 darin bestehen, daß der Punkt ganz fest ist, sich auf einer bestimmten Oberfläche
 zu bewegen, oder daß er gezwungen ist, auf einer gegebenen Linie zu
 bleiben. Es kommt sich ein Punkt, welcher durch einen festen Faden
 an einem festem Punkt gebunden ist, notwendig auf einer nur dem
 letzten beschriebenen Regeloberfläche, der Kugeloberfläche, beschränkt ist. Ist
 der Punkt dagegen durch zwei feste Fäden an zwei bestimmten Punkten
 befestigt, so kann er sich nur auf einer Kugel bewegen, deren
 Punkte an den Aufhängepunkten die gegebenen Abstände haben.
 Eine solche Oberfläche, auf welcher der Punkt sich bewegen muß,
 hat zunächst nur den Einfluß, jede Bewegung des Punktes zu hin-
 dern, welche in der Richtung nach dem Centrum ausgeführt werden
 könnte, und also sämtliche Beschleunigungen in dieser Richtung zu ver-
 hüten. Man kann daher für die Oberfläche einen normal gegen sie
 gerichteten Punkt von unbestimmter Größe substituieren, welcher mit
 den Normalbeschleunigungen respekt, in jedem Augenblicke groß
 genug ist sie zu verhindern. Ist D dieser Punkt, mit α β C. der Winkel,
 welcher die Normale der Oberfläche gegen die AO bildet, so setzen wir
 die Gleichungen 14. kann in diese über:

$$P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + \dots = 0$$

$$17. \dots P_1 \cos \beta_1 + P_2 \cos \beta_2 + \dots = 0.$$

$$D + P \cos \gamma_1 + P_2 \cos \gamma_2 + \dots = 0.$$

Es ist leicht zu sehen, daß zur Herstellung des Gleichgewichts nur die ersten beiden Gleichungen erfüllt sein müssen, d. h. daß die Kräfte dem Gesamten nach gegen einander punktförmig tangential der Oberfläche Null sein muß; verursacht die dritte Gleichung nicht, daß der Punkt der unbekannten Punkte anzugehen, welchen die Oberfläche aufsteht. Ist der Punkt gewiß, auf einer Kurve zu bleiben, so werden natürlich alle beschleunigungen aufgehoben, deren Richtungen senkrecht gegen die Richtung der Kurve, also in der auf dem Kurvenelement punktförmigen Ebene aufsetzen sind. Man können also wieder eine die Kurve aufsteigen durch einen Punkt, welchen man auf einer Kurve eine man voraussetzen bestimmte Richtung hat, sondern man in der gegebenen Ebene wieder muß. Legen wir das Koordinatensystem so, daß eine Achse (X) in der Tangente der Kurve fällt, verursacht die anderen beiden in der neuen Ebene liegen. Bildet man den unbekannten Punkt D mit der X Achse den Winkel φ , so hat man die Gleichungen:

$$P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + \dots = 0$$

$$18 \quad D \cos \varphi + P_1 \cos \beta_1 + P_2 \cos \beta_2 + \dots = 0$$

$$D \sin \varphi + P_1 \cos \gamma_1 + P_2 \cos \gamma_2 + \dots = 0$$

Zu diesem Falle also genügt die erste Gleichung, welche angibt, daß die Kräfte der tangentialen Komponenten sämtlicher Kräfte verschwinden muß, indem sie unter beiden dazu keinen, Größten Richtung des Punktes zu bestimmen, welchen die Kurve aufsteht.

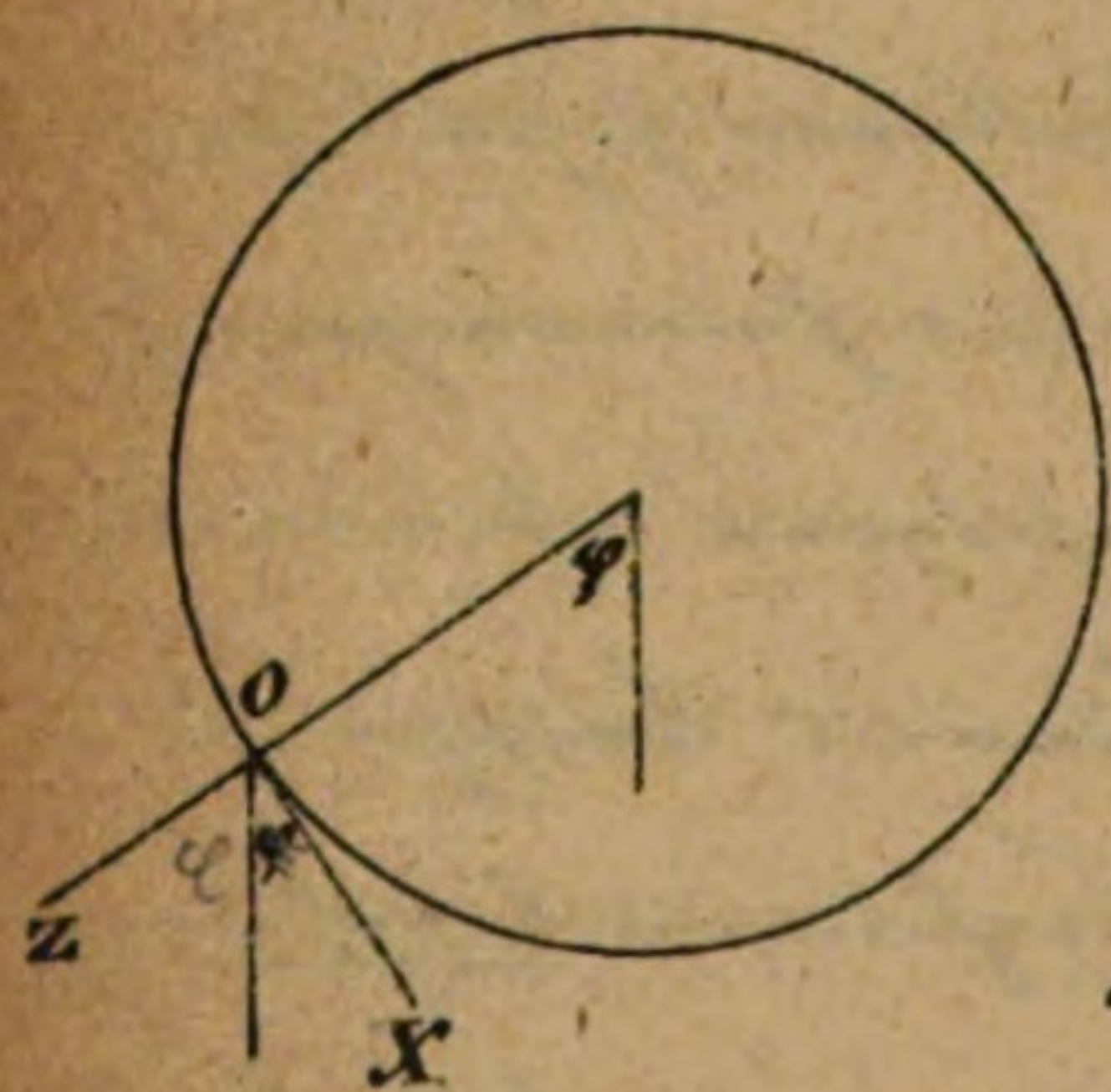
Daß wir bei der Bewegung auf einer Oberfläche nur zwei Bedingungen aufstellen haben, ist ebenfalls leicht zu erklären, daß für

Bestimmung der Lage des Punktes in der That nur zwei Coordinaten erforderlich sind, die dritte aber kann durch die Oberflähe gegeben se. Und so ist die Gleichgewichtsbedingung des Punktes auf sich vollkommen bestimmt. Obgleich genügt bei der Bewegung auf einer Kugel die Kenntniß eines einzigen Coordinaten, daher man auf nur eine einzige Bewegungsgleichung beschränken.

Interessanter ist es zu bemerken, der Punkt (Klimakörper) kann auch entweder vollständig auf der Oberflähe der Kugel ruhen, oder nur auf derselben gleiten, so daß er zwar nach einem gewissen Punkte hin entweichen kann, nach der entgegengesetzten aber an der Bewegung verhindert ist. Es nun auf ein solches Beispiel zurückzukommen, kann ein Körper, welcher durch einen helfenden Faden mit einem festen Punkte verbunden ist, zwar schweben, trägt aber die mit jenem Faden befestigte Kugeloberflähe nicht festhalten, insofern derselben aber sich ungehindert bewegen. Der Punkt also, durch welchen dann die Oberflähe verläuft ist, daß dann nur nach derjenigen Seite gerichtet sein, nach welcher Bewegung möglich ist, weil die Oberflähe nur einer entgegengesetzten Seite der äußeren Kräfte zu widerstehen im Stande ist. Legen wir also bei Darstellung der Formeln 17 die positive Z der nach der Seite der vollkommenen Unmöglichkeit, so tritt die Bedingung hinzu, daß der ant 17. folgende Part von D positiv sein muß, d. h. der Punkt der Seite der freien Bewegung nicht zu erreichen, damit der Punkt auf der Oberflähe im

Gleichgewicht sein können. Und bei der Bewegung auf einer Kugel
wird als Resultat gewisse Oberflächenbedingung zu stehen, daß,
kürzen gewis bestimmte Bedingungen anstellen.

Um dies zu erläutern, mag ein einfaches Beispiel aufgeführt wer-
den. Ein Punkt auf dem Gewichte A , bewegt sich auf einem ver-
ticalen Kreise. Sei die Z die im Punkte des Kreises befestigt,
die X die Tangente. Die Pufferkraft bildet mit
der Z die Winkel φ . Die Gleichungen
gehen also



$$A \sin \varphi = 0$$

$$D + A \cos \varphi = 0$$

Es daher der Punkt vollkommen auf den Kreis
gezwungen, so daß nur $\sin \varphi$ vorzukommen,

d. h. es ist

$$\varphi = 0 \text{ oder } \varphi = 180^\circ$$

Der Punkt ist also an der äußersten und tiefsten Stelle des Kreises
im Gleichgewicht. Aber man set zugleich an der äußersten
Stelle $D = A$, und an der tiefsten $D = -A$. Ist also der Punkt
auf der äußeren Seite des Kreises gezwungen, daß so, daß er
außen sich frei bewegen kann, so gibt man die äußerste Stelle
einen positiven Wert von D , und also eine Gleichgewicht-
lage; ist dagegen der Punkt auf der inneren Seite ge-
zwungen, so müßte mit dem Obigen übereinstimmen und
die Z die auf einen Gewicht zu stehen; oder im gegenseitigen
Kräfteverhältnis muß D negativ sein; d. h. nur die tiefste
Stelle gibt eine Gleichgewichtslage. —

Man unterscheidet endlich in Bezug auf die Natur des Glei-
 gerichts im stabilis, labilis und indifferentis. Bei dem ersten Befol-
 der Punkt, nach einer kleinen Abschreibung, sinkt er in die Gleisgerichts-
 lage zurück, bei dem labilen Gleisgerichte hat eine kleine Abschreibung eine
 vollkommenen Hinüberleitung des Punktes zur Folge; der Punkt ent-
 fernt sich gänzlich von seiner früheren Lage und sucht einen Ort des
 stabilen Gleisgerichts auf. Bei der dritten Art endlich bleibt er bei einer
 kleinen Abschreibung des Punktes nach seiner im Gleisgerichte; so daß man es mit
 einem Kiste unmittelbar unter demselben liegender Gleisgerichte liegen zu thun
 hat. Es ist ein besonderer Vorzug, an einem Kiste einen Punkt befestigt, in der
 nächst gerichteten Lage im Gleisgerichte. Aber die kleinste Loslösung
 führt ihn aus dieser labilen Lage hinweg und läßt ihn nur die sta-
 bile Lage Besorgungen aufsuchen d. h. nur die nach unten gerichtete
 Vertical. Ein besonderer Punkt dagegen, welcher auf einem festge-
 haltenen Stäbe liegt, bleibt, wie man ihn verschiebt, immer im Gleisgerichte;
 jeder Ort der Ebene ist eine Gleisgerichtslage, das Gleisgerichte ist
 indifferent. Um aber zu bestimmen, welcher von diesen Orten eine
 bestimmte Gleisgerichtslage angeht, muß man in der That auf die
 jenige Bewegung genau eingehen, welcher der Punkt nach einer
 geringen Abschreibung annehmen würde, was im Allgemeinen dieser
 Betrachtungen erfordert. Nur wenn der Punkt gerichtet ist, ist auf
 einer Kiste zu beruhen, so genügt es, die Bestimmung anzufangen,
 welche bei einer kleinen Abschreibung auf der Kiste eintritt.
 Ist dieser der Abschreibung entgegengerichtet, so sucht sie den

Strecke nach seiner senkrechten Lage zurück, und ist also dasselbe bei jeder
Veränderung des Fall, so ist das Gleitgewicht stabil. Fällt aber nach
einer Seite die Richtung der entgegenstehenden Beschleunigung mit der
Richtung der Herabziehung zusammen, so steht sie ebenfalls zu vergrößern
mit dem Gleitgewicht ist stabil. Ist endlich bei einer kleinen Herabziehung
die entgegenstehende Beschleunigung Null, so hat man ein indifferentes
Gleitgewicht bei sich.

§. 12. Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.

Zu §. 9. ist eine Definition der Arbeit gegeben, nach welcher die Arbeit
einer Kraft durch das Product von Kraft und Weg gemessen wird.

Diese Definition bedarf einer Ergänzung, wenn die Richtung der
Weges nicht mehr mit der Richtung der Kraft zusammenfällt. Man kann
man sich die Kraft in zwei rechtwinklige Componenten zerlegt denken,
von denen die eine in die Richtung des Weges fällt, die andere senkrecht
dagegen ist. Offenbar wirkt nur die erstere, während der Punkt für
den Weg zurückgelegt, und das ist daher die Bestimmung der Arbeit al-
lein berücksichtigt werden. Ist also P die Kraft, s der zurückgelegte Weg,
und α der von der Richtung der Kraft eingeschlossene Winkel, so ist, da nur
die Componente $P \cos \alpha$ wirksam ist, die Arbeit dargestellt durch

$$P s \cos \alpha$$

Es ist bemerkenwerth, daß dies einseitig aufgestellt werden kann,
als Product der projectirten Kraft mit dem Wege, ebenso aber auch als
Product der Kraft mit der Projection des Weges auf die Kraft,
was in vielen Fällen die Berechnung erleichtert.

Dieser Ausdruck erlaubt es, die Bedingungen für das Gleichgewicht sehr einfach auszudrücken. Betrachten wir zunächst einen frei beweglichen Punkt. Dann kann man sich denselben auf der Gleitfläche als einen kleinen Körper S vorstellen, der eine Richtung annehmen kann. Da die Wahl der Koordinatenachsen offenbar ganz beliebig ist, so können wir die Achse x mit einer dieser Richtungen zusammen fallen lassen. Dann gilt aber die Gleichung

$$19 \quad P_1 S \cos \alpha_1 + P_2 S \cos \alpha_2 + \dots + P_n S \cos \alpha_n = 0,$$

welche sich aus der ersten Gleichung 14. nur durch den Factor S unterscheidet, und wo jetzt die Winkel der Kräfte gegen den kleinen Körper S bestimmt sind. Aber die Gleichung 19 gilt für jede Verschiebung der Richtung und folglich lassen sich auch die anderen Gleichungen 14 in dieselbe Form bringen, wenn man α als den Winkel bestimmt, welche die Kräfte gegen die jetzige Verschiebungsebene bilden. Und indem man sie so allgemein faßt, können wir sagen, daß diese eine Gleichung sämtlicher Gleitbedingungen in sich faßt. Wir stellen also nicht anders dar, als das was alle Arbeiten, welche die Kräfte $P, P_2, \dots$ bei der kleinen Verschiebung S leisten - eine Verschiebung, welche sehr geringfügig ist, um die Kräfte während ihrer Dauer als noch größer in Richtung constant betrachten zu können.

Dieselbe Gleichung 19 gilt aber auch noch für einen Punkt, welcher genötigt ist, auf einer Oberfläche zu liegen; aber, da die Achse x in den Gleichungen 19 nur in der Tangentenebene der Oberfläche liegen darf, auf möglichen Verschiebungen, welche in dieser Ebene, d. h. in der Oberfläche selbst vor sich gehen. Und eben so endlich gilt die Gleichung 19.

auf bei einem Punkt, welcher auf einer Kurve gegeben ist, jedoch, da die 2 Ape. in den Gleichungen 18 mit der Tangente der Kurve zusammenfällt, nur für Werthe in der Richtung der Kurve.

Die Gleichung 19 gilt also ganz allgemein für jede Werthe, welche mit den Bedingungen verträglich ist, denen der Punkt unterliegt. fügen wir hinzu, daß man eine solche nur gedachte Werthe Werthe eine virtuelle, da sie dabei geleistete Arbeit eine virtuelle Arbeit nennt, so können wir folgendes allgemeines Prinzip aufstellen.

Wenn ein Punkt im Gleichgewicht sei, so ist nötig und hinreichend, daß für jede virtuelle Werthe die Summe der virtuellen Arbeiten Null sei.

Dieses Satz begreift man durch den Namen des Prinzips der virtuellen Gesammtheiten; im Namen, welcher erklärt ist, wenn man sich die Werthe durch eine dem gegebenen Punkt mit gegebener Gesammtheit angeschlossen vorstellt. Die ganze Aufstellung, deren das Prinzip fähig ist, weicht es zu einem der möglichsten der Werthe. Eine andere Ableitung desselben, auf ganz anderen Gesichtspunkten soll weiter unten gegeben werden.

I. B. Anwendungen.

Einige von Aufgaben mag dazu dienen, die Anwendung des Prinzips zu erläutern und auf spätere Anwendungen vorzubereiten. 1. An dem Ende eines in der Horizontalen beschleunigten, ist ein Gewicht G befestigt. Am anderen Ende wirken zwei Kräfte P und Q , welche mit der Horizontalen die Winkel α und β bilden. Das Gewicht des Hänges soll gegen G unverändert sein.

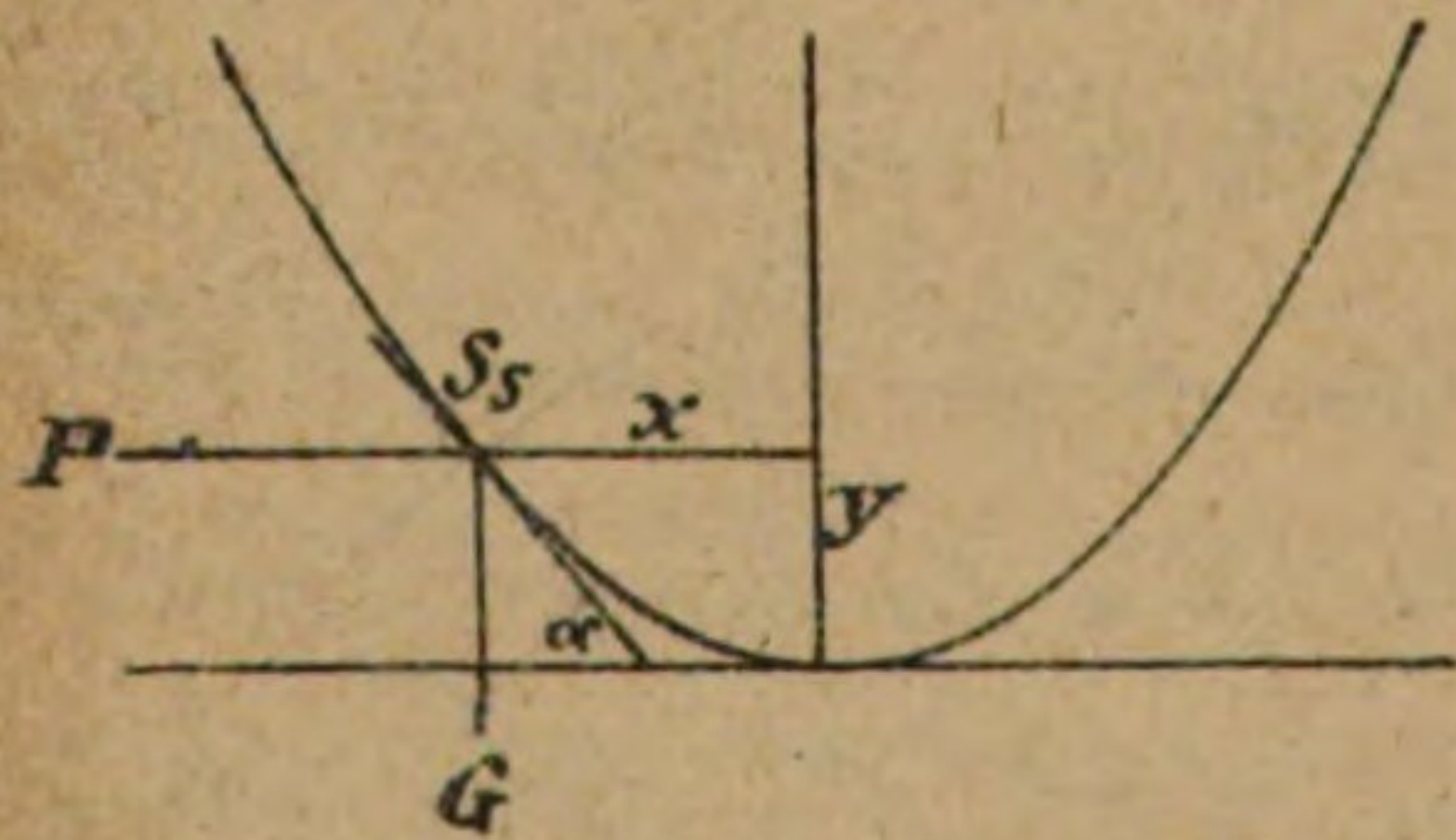
Das untere Gelenk gibt immer einen negativen Wert von $\cos \frac{x}{2}$, welcher sich verhältniß kleinere als 1; man hat also immer eine Gleichgewichtslage, welche allerdings stabil ist, für einen Wert von x verliert, da schon $\frac{x}{2}$ ein stumpfer Winkel, größer als 180° . Für stabile Gleichgewichtslage erhält man für das obere Gelenk, aber nur so lange $P < G$, da sonst $\cos \frac{x}{2} > 1$ wird. Ist der Ort der Rolle am oberen Endpunkt des verticalen Durchmessers, so hat man $\delta = 90^\circ$. Also

$$P \cos(45^\circ + \frac{x}{2}) = G \cos x = 2 G \cos(45^\circ + \frac{x}{2}) \cos(45^\circ - \frac{x}{2}), \text{ oder}$$

$$\cos(45^\circ - \frac{x}{2}) = \frac{P}{2G}; \sin x = 2 \cos^2(45^\circ - \frac{x}{2}) - 1 = \frac{P^2 - 2G^2}{2G^2}$$

Man erhält also eine Gleichgewichtslage, so lange $P < 2G$.

3. Ein Körper von dem Gewicht G , welcher auf einer Parabel befindet, wird durch eine horizontale Kraft P in Gleichgewicht gehalten. Seine Lage ist zu bestimmen. Die Tangente der Parabel bildet mit der horizontalen Tangente des Scheitels den Winkel α . Bei einer Kraftwirkung P auf der oberen Richtung der Parabel set man also die Abstände:



$G \cos(90^\circ + \alpha)$, d. h. $P \cos \alpha$. So, mit der Gleichung $G \sin \alpha = P \cos \alpha$, $\tan \alpha = \frac{P}{G}$

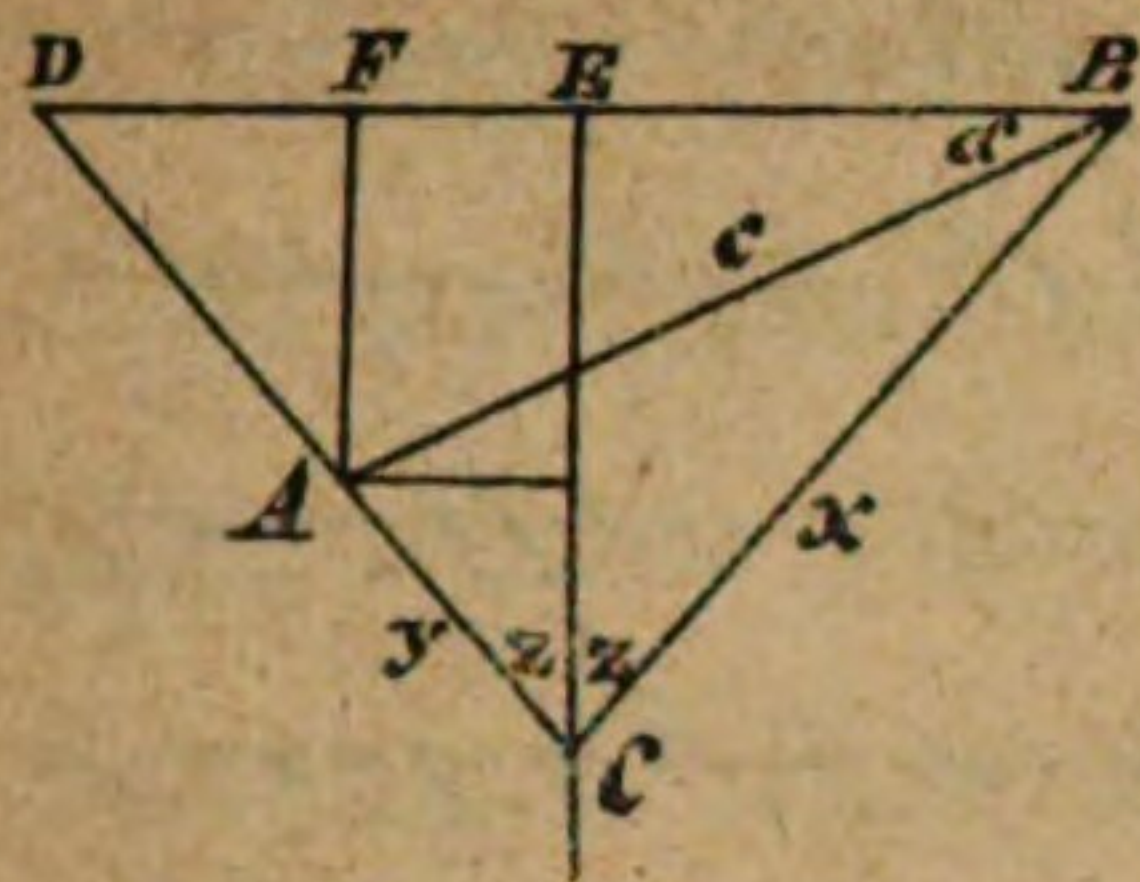
Ist nun die Gleichung der Parabel $x^2 = 2Py$, so ist bekanntlich $\tan \alpha = \frac{2y}{x}$.

Man set also zur Bestimmung von x und y die beiden Gleichungen:

$$\frac{2y}{x} = \frac{P}{G} = \frac{x}{P}, \text{ mithin:}$$

$$x = \frac{GP}{G}, \quad y = \frac{P^2}{2G^2}$$

4. Zwei feste Punkte sind durch einen Faden verbunden, welcher durch ein Gewicht G gespannt wird. Die Aufhänge des Gewichts ist zu bestimmen.



die Fortsetzung der selben Punkte von unten für C,
 α der Winkel der Verbindungslinie gegen die Horizontale,
 l die Länge des Fadens. Da das Gewicht auf dem Faden
 gleiten kann, so ruht es im Gleichgewicht sein, sobald beide

Theile des Fadens den gleichen Druck ausüben können, und wenn also beide mit
 der Verticalen gleichen Winkel bilden. Zu diesem Ende darf man sich nur den
 kürzeren Theil des Fadens (AC) bis D verlängert denken, und DB als die
 Aufhängungspunkte betrachten, dann zeigt die Symmetrie der Figuren, daß im
 Gleichgewicht $CB = DC$, die Distanzen, sowie der Winkel ACE und
 BCE auf beiden Seiten gleich sein müssen. Da aber der Punkt des be-
 festigungspunktes nicht im Gleichgewicht befindlichen Fadens, kann
 einfluß auf die Richtung desselben haben kann, so muß das Gleichge-
 wicht noch betrachtet, wenn der Faden, statt in D und B, in A u. B auf-
 gehängt ist. Ist also z der gemeinschaftliche Winkel beider Fadenstücke
 gegen die Verticalen, T der Druck von jedem Ende des Fadens aufgezogen (abhängig
 von der Einwirkung dieser Druckkräfte kann man den Punkt C als frei be-
 rücksichtigt betrachten) so gibt eine Verticalerhebung nach oben die Arbeit:

$$G \cos 180^\circ. \delta s, T \cos x. \delta s, T \cos x. \delta s, \text{ also}$$

$$G = 2 T \cos x, T = \frac{G}{2 \cos x}$$

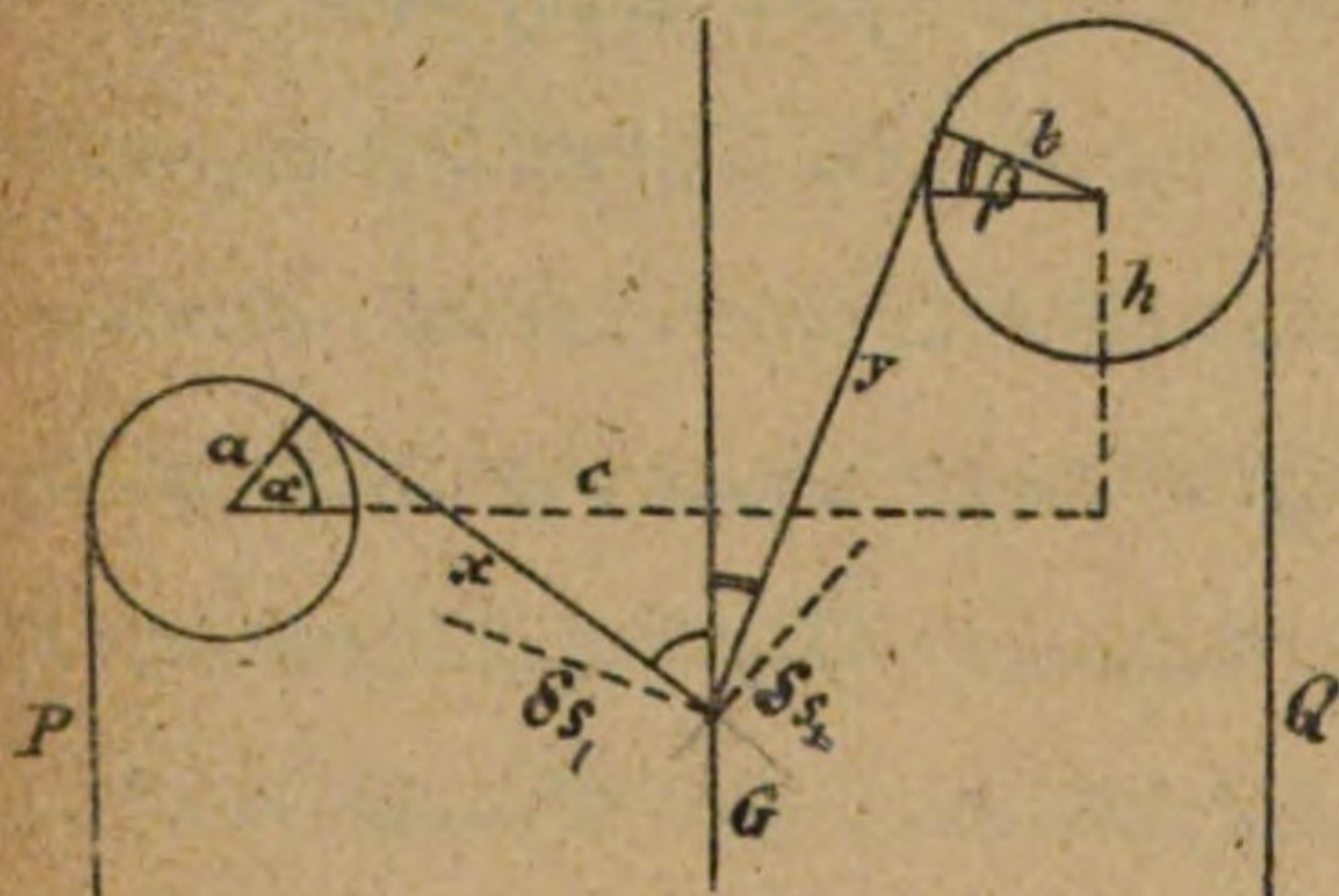
Indem Projectionen von AB und ACB auf die Horizontale u. Verticalen,
 BE und AF, findet man aber die Gleichungen:

$$(x + y) \sin x = c \cos \alpha, (x - y) \cos x = c \sin \alpha. \text{ Und da noch } x + y = l,$$

so findet man die Resultate:

$$\sin x = \frac{c \cos \alpha}{l}, T = \frac{l G}{2 \sqrt{l^2 - c^2 \cos^2 \alpha}}, x = \frac{l}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{c^2 \sin^2 \alpha}{l^2}} \right), y = \frac{l}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{c^2 \sin^2 \alpha}{l^2}} \right)$$

5, Ein Gewicht G wird durch zwei Seile getragen, welche über Rollen gehen und durch Gewichte P Q gespannt sind. Es ist die Aufhänge von G zu bestimmen.



die Ketten der Rollen a, b welche nach den Befestigungspunkten der Seile gezogen sind, bildet mit der horizontalen die Winkel α, β . Eben diese Winkel bildet die Ketten mit den beiden Seilen. Verschiebt man den Ort des Gewichts jetzt um die kleinen Punkte S_1, S_2 , senkrecht gegen die Richtungen

der Seile, so hat man folgende Arbeiten:

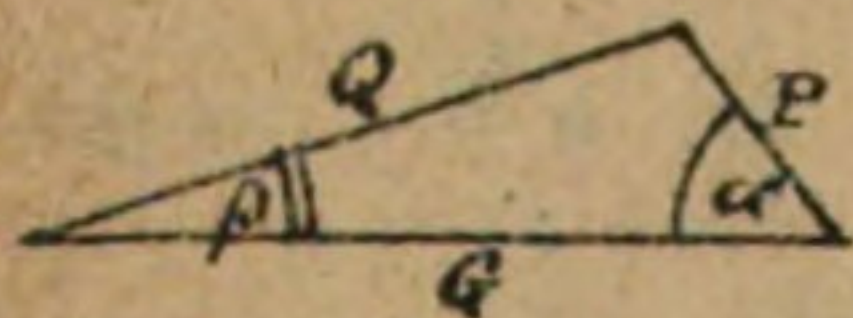
Verschiebung S_1 : $G S_1 \cos(90 + \alpha)$, 0 , $Q S_1 \cos(90 - \alpha - \beta)$.

Verschiebung S_2 : $G S_2 \cos(90 + \beta)$, $P S_2 \cos(90 - \alpha - \beta)$, 0 .

Man hat also die beiden Gleichungen:

$$G \sin \alpha = Q \sin(\alpha + \beta), \quad G \sin \beta = P \sin(\alpha + \beta).$$

Aus diesen Gleichungen sieht man, daß α, β die Winkel sind aus P, Q, G zusammengehalten, d. h. es ist, welche bezügl. der Seiten Q und P gegenüber liegen. Es mag bei dieser Gelegenheit der



allgemeine Satz bemerkt werden, welcher durch diese Betrachtungen zugleich bewiesen ist:

Bei Kräften, welche in einem der Gleichgewichte stehen, bilden gegen einander Winkel, welche die Außenwinkel des aus ihnen zusammengefügten Dreiecks sind. Denn in dem vorliegenden Falle bilden die Kräfte P, Q, G gegen einander die Winkel $180 - \alpha$, $180 - \beta$, $\alpha + \beta$.

Zugleich ergibt sich die Bedingung, daß man den Gewichten P, Q, G keinen

größer sein darf als die anderen Seiten zusammenkommen, den Punkt würde kein Dreieck sich konstruieren lassen, also auf kein Gleitgewicht bestehen können. Nachdem auf diese Weise die Winkel α & β gefunden sind, bestimmt man leicht die Längen x & y der Längsteile, u. so den Ort des Gewichts G . Wenn C der horizontale, h der verticale Abstand der Mittelpunkte der Rollen, so erfüllt man durch Projektion der Verbindung $a x y b$ auf die horizontale und Vertikale:

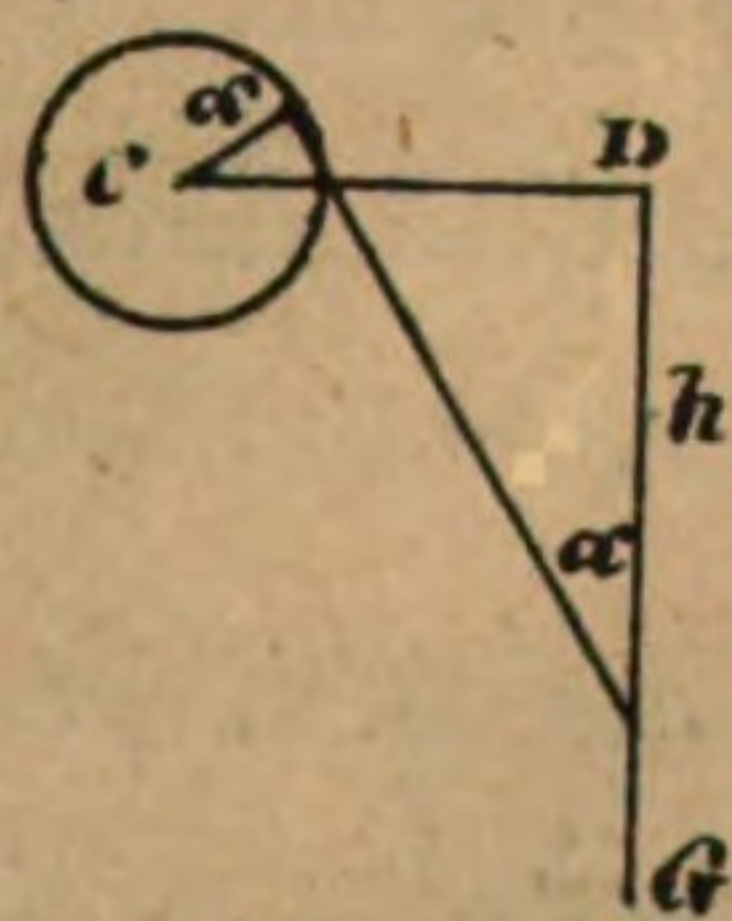
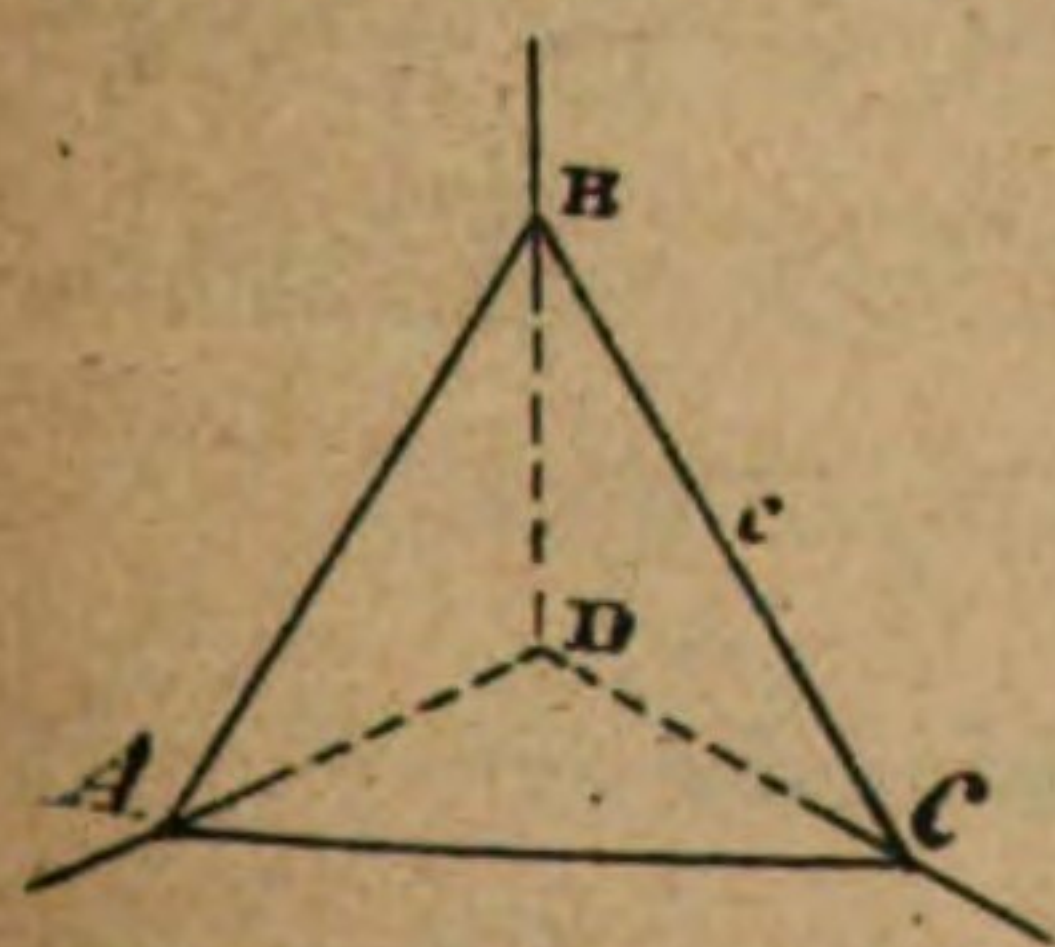
$$c = a \cos \alpha + x \sin \alpha + y \sin \beta + b \cos \beta$$

$$h = a \sin \alpha - x \cos \alpha + y \cos \beta - b \sin \beta,$$

Gleichungen nach x & y auflösen für x und y findet, u. einzeichnen:

$$x = \frac{c \cos \beta - h \sin \beta - a \cos(\alpha + \beta) - b}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad y = \frac{c \cos \alpha + h \sin \alpha - a - b \cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

6. Ein Gewicht G wird durch drei Seile getragen, welche über gleich große, in derselben Höhe in den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks aufgestellte Rollen gehen, und durch gleiche Gewichte P gespannt sind. Die Gleichgewichtslage von G ist zu ermitteln. Die erste Figur zeigt das gleichseitige Dreieck ABC der Mittelpunkte der Rollen; die zweite den vertikalen Durchschnitte nach der durch die Rolle C geht. Es offenbar sämtliche Teile mit den Vertikalen denselben Winkel α bilden, so erfüllt man durch Projektion nach oben die Relationen:



ABC der Mittelpunkte der Rollen; die zweite den vertikalen Durchschnitte nach der durch die Rolle C geht. Es offenbar sämtliche Teile mit den Vertikalen denselben Winkel α bilden, so erfüllt man durch Projektion nach oben die Relationen:

Es gilt also die folgende Bedingung auf, daß G kleiner sein muß als die

$$G \leq 3P \cos 180^\circ, \quad 3P \cos \alpha, \quad \text{so daß also}$$

$$3P \cos \alpha - G = 0, \quad \cos \alpha = \frac{G}{3P}$$

Es gilt also die folgende Bedingung auf, daß G kleiner sein muß als die

Formel der übrigen Größen. Um nun die Tiefe des Gewinns $\bar{A}$ unter dem Mittelpunkt des gleichförmigen Sinkens zu bestimmen, setze man, da $DC = \frac{c}{\sqrt{3}}$,

die Gleichung: $\frac{c}{\sqrt{3}} = h \tan \alpha + \frac{a}{\cos \alpha}$, also

$$h = \frac{\frac{c}{\sqrt{3}} \cos \alpha - a}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{3} \frac{c}{\sqrt{3}} \cos \alpha - 3a \cdot P}{\sqrt{3} P^2 - a^2}.$$

S. 14. Gleichung der lebendigen Kraft.

Ein beliebig bewegter Punkt fahre in einem Augenblicke mit Geschwindigkeit v_0 . Auf ihn wirke eine Beschleunigung P , welche mit der Bewegungseinstimmung den Winkel α bildet, und welche jedenfalls constant einer sehr kleinen Zeit als nach großer Zeitwirkung constant gelten darf. Er bewegt sich während dieser Zeit des Punktes gleichförmig beschleunigt, und zwar in der Richtung von P mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 \cos \alpha$, senkrecht dagegen, in der Richtung $v_0 \sin \alpha$ mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 \sin \alpha$. Nach Verlauf der kleinen Zeit t hat also der Punkt in beiden Richtungen die Geschwindigkeiten erhalten

$$v \cos \alpha + p t, \quad v_0 \sin \alpha,$$

und der Weg zurückgelegt:

$$v_0 \cos \alpha \cdot t + p \frac{t^2}{2}, \quad v_0 \sin \alpha \cdot t$$

Die absolute Geschwindigkeit v hat dann den Ausdruck:

$$v^2 = (v_0 \cos \alpha + p t)^2 + v_0^2 \sin^2 \alpha = v_0^2 + 2p(v_0 \cos \alpha + p \frac{t^2}{2})$$

Was es ist $\frac{v^2 - v_0^2}{2}$ gleich der Beschleunigung multipliziert mit der Projection des Weges auf die Richtung. Um für die Beschleunigung auf die Kraft zurückzuführen, setze man nach S. 9. 3. man mit $\frac{a}{g}$ zu multiplizieren, wenn a das Gewicht des bewegten kleinen Körpers ist; oder man

Kann nicht das Produkt der Kräfte in den auf sie projicirten Weg, d. h. die Arbeit der Kräfte auf diesem Weg erhalten sein. (Auf beinahe man hier kurz W , so hat man die Gleichung:

$$21 \quad \frac{G(v^2 - v_0^2)}{2g} = W,$$

d. h. die auf dem kleinsten Wege geleistete Arbeit ist gleich $\frac{G}{2g}$ multipliziert mit dem Zuwachs des Quadrats der Geschwindigkeit.

Von diesem Resultate aber die für zukünftige Allgemeinheit zu geben, bemerkt man zunächst, daß, wenn die Beschleunigung constant oder stetig gekrümmt ist, die Anfangsgeschwindigkeit für jeden Zeitmoment nicht anders ist als die Endgeschwindigkeit des vorhergehenden. Dies ist nicht mehr der Fall, wenn der Körper auf einer Bahn bewegt, welche irgend eine scharfe Ecke bildet; oder wenn überaus plötzlich (Umschüttungen in der Bewegung eintrifft). Nehmen wir aber diesen Fall aus, so ist offenbar die Summe aller Zuwächse der Geschwindigkeit gleich dem gesammten Zuwachs seiner Größe, oder es ist auf für eine endliche beschleunigte Bewegung des Geschwindigkeit zuwachs mit $\frac{G}{2g}$ gleich der auf diesem Wege geleisteten Arbeit.

Die Gleichung 21. gilt also auf für endliche Bewegungen. Eine zweite Bemerkung bezieht sich auf die Berechnung der Arbeit. Ist der Körper einem gewissen System von Bestimmungen unterworfen, so kann man die oben eingeführte Bestimmung p als resultierende Kraft ansehen. Dann ist W die Arbeit der resultirenden Kraft. Es ist also immer die Arbeit der Resultirenden gleich der Summe aller Arbeiten der einzelnen Kräfte des Systems. Inwiefern bei S eine kleine geradlinige Zug =

entgegengesetzte Kräfte, die Kräfte $P, P_2, \dots$ des Systems bilden mit P den Winkel $\alpha, \alpha_2, \dots$, die Resultante des Winkels α . Nehmen wir dann die Richtung S zum α oder α_2 , so ist nach S. 10. 8. 9:

$$P \cos \alpha = P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + \dots + P_n \cos \alpha_n, \text{ oder auch}$$

$$P s \cos \alpha = P_1 s \cos \alpha_1 + P_2 s \cos \alpha_2 + \dots + P_n s \cos \alpha_n.$$

Es ist aber der entgegengesetzte Satz, für einen kleinen Zeitmoment Δt gedacht, in welchem die Bewegung als geradlinig betrachtet werden darf. Nehmen wir daher, bestimmen der Arbeit für die ganze Zeit der Bewegung, indem wir den $S P d$ die entgegengesetzten Theile beilegen, so erhalten wir den vorliegenden Satz selbst. Die Druckkräfte aber, durch welche eine Oberfläche oder Fläche zu ersetzen ist, auf welcher das Gewicht P stehen kann, kann man gegen die Bewegung hinreichend gerichtet, für Arbeit ist also immer Null. Die durch diese Bedingungen nicht bestimmten unbekannten Punkte, Kräfte sind daher bei der Berechnung der Arbeit nicht zu berücksichtigen.

Es ist ferner leicht die Arbeit zu bestimmen, welche erforderlich ist, um einen Körper, welcher die Geschwindigkeit v_0 besitzt, die Geschwindigkeit v mitzutheilen. Wenn man wirklich keinen Widerstand zu überwinden hat, so hat man unmittelbar als Werth dieser Arbeit:

$$\frac{G}{g} \cdot \frac{v^2 - v_0^2}{2},$$

mit einem Widerstand nach oben und gegen W die Arbeit hervorzubringen auf dem Wege S immerhalb dessen die Geschwindigkeitzunahme stattfinden soll, so ist die gesuchte Arbeit

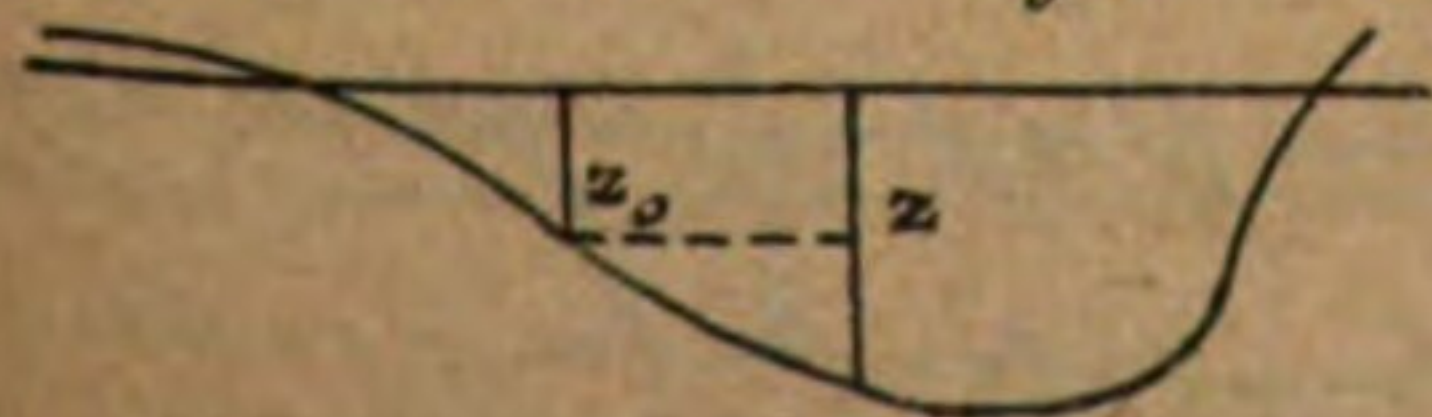
$$\frac{G}{g} \cdot \frac{v^2 - v_0^2}{2} + W;$$

und endlich der mittlere Werth der Kräfte, welche auf dem Wege S diese Arbeit zu leisten geeignet ist:

$$\frac{G}{g} \cdot \frac{v^2 v_0^2}{2s} + \frac{W}{s}$$

Die Gleichung 21 --- führt den Namen der Gleichung der lebendigen Kraft.
Man versteht unter der lebendigen Kraft eines Punktes das Produkt seiner
Masse mit dem Quadrat seiner Geschwindigkeit, d. h. den Ausdruck $\frac{G}{g} v^2$
(oder, vergleiche die Bemerkung zu S. 9. 4, $\frac{G}{2g} v^2$). (Auch man kann dann die
Gleichung so ausdrücken: Die auf einem Wege geleistete Arbeit ist gleich
der Zunahme der fallen (gehenden) lebendigen Kraft.

Nehmen die Arbeit, wie in sehr vielen Fällen es in der That geschieht, auf
einer der Kurven des Punktes an und denken sich, so nennt man die
dann erhaltene Form der Gleichung 21 ---. Das Prinzip der Erhaltung
der lebendigen Kraft; eine Form, welche zugleich dem Ausdruck „le-
bendige Kraft“ die Bedeutung gegeben hat. Man kann nämlich von $W = \text{const.}$,
da W auch x, y, z unabhängig ist, als die Gleichung einer Oberfläche an-
sehen, und findet dann, daß der Ausdruck $\frac{G}{g} v^2$ immer wieder densel-
ben Werth annimmt, sobald der Punkt in seiner Bewegung wieder
auf diese Oberfläche zurückgekehrt ist; sobald man sich vor dem mit einem Ort
von physikalischer Symbolik $\frac{G}{g} v^2$ als das gewisse massen lebendige
dem Punkte zugesprochen hat, welches, auf einer bestimmten Höhe,
denselben erhalten, unter gleichen localen Verhältnissen immer wieder
mit dem nämlichen Werthe versehen wird. Diese Darstellung der Arbeit
ist zum Beispiel dann möglich, wenn der Punkt nur allein unter dem Ein-
fluß der Schwerkraft bewegt, mag seine Bewegung im übrigen frei oder
unfrei sein. Nehmen wir die x Achse vertical, nach unten gerichtet,



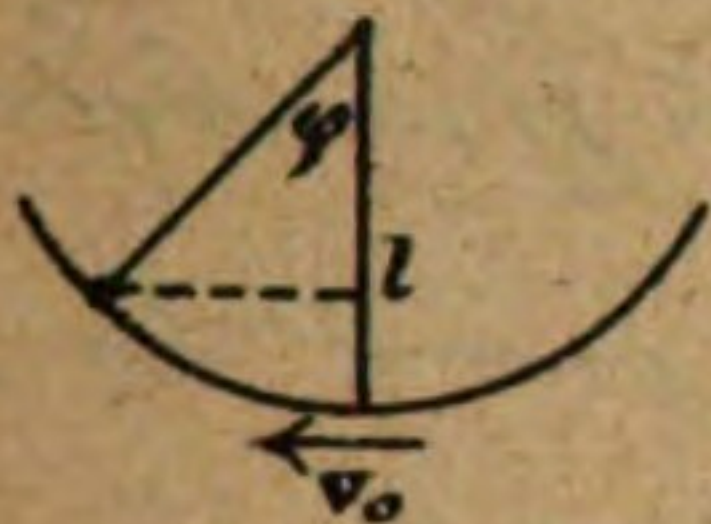
und lassen sich im Anfang von einem Orte im Abstand

x_0 von der x, y Ebene zu einem Orte im Abstand x von derselben bewegen. Die Arbeit der Pufferkraft wird dann erhalten, wenn man G mit der Projection des Weges auf die Verticale multiplicirt, d. h. $G(x - x_0)$; und man hat daher die Gleichung

$$22 \quad \frac{G}{g} \cdot \frac{v^2 - v_0^2}{2} = G(x - x_0).$$

Man sieht daraus, daß der Punkt in der mit derselben Horizontal Ebene auf einer vierten derselben Gefährlichkeit ankommen muß, welche auf der Höhe h , auf welcher sich von der einen Horizontal Ebene zu der anderen bewegt. Und wenn es gewünscht ist, sich auf einem Hügel zu bewegen, so kann, falls diese Bewegung eine oscillirende ist, die Gefährlichkeit des Punktes in einer gewissen Horizontal Ebene vorzeichnen, d. h. die Entfernung der Bewegung kann man in dieser Horizontal Ebene nachweisen. Der Punkt wird immer bis zu derselben Höhe ansteigen, wenn es so beschaffen ist. Es müßte immer im Körper, welcher von der Höhe h ausgeht, eine solche Ebene sich ableiten, und der nämlichen Gefährlichkeit an ihrem Hügel antworten, als wenn er von der untersten Höhe herauf sich abwärts bewegt wäre. Daß in diesem Falle, und überhaupt, was es sich um Bewegungen auf einer materiellen Bahn handelt, diese Betrachtungen nicht vollkommen anwendbar sind, soll im folgenden B. gezeigt werden. Die Punkte aber (mit geringen Correctionen) für alle die Bewegungen, welche im Körper des Körpers besteht, daß es an einem Orte befestigt ist, welche sich auf einer gegebenen Ebene oder Oberfläche abwickeln. Es bei den Bewegungen des Punktes, d. h. eines Punktes von einem Punkte, welche nur ein hohes Leben mit einem solchen Punkte verbunden ist. Bei der Länge des Lebens, so eine Gefährlichkeit, welche dem selben Punkte in einem Punkte, d. h. während der Zeit vertical

und unten gerichtet ist, mit getheilt zu setzen. Zudem so findet man an-
 sieht, wie die Arbeit der Pufferkraft (welche negativ ist, da die Richtung der
 Kraft der Richtung des auf sie projicirten Wags entgegengesetzt ist)



gleich $-Gl(1 - \cos \varphi) = -2Gl \sin^2 \frac{\varphi}{2}$. Daraus bei dem Aufschlag:
 Winkel φ die Geschwindigkeit aus der Gleichung gefunden wird:

$$\frac{v^2 - v_0^2}{2} \frac{G}{g} = -Gl \sin^2 \frac{\varphi}{2} \quad v = \sqrt{v_0^2 - 2gl \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

Der Körper erreicht also den Aufschlagswinkel für welchen v verschwindet:

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{v_0^2}{2gl}}$$

und es ist dann zurück; aber nur wenn $v_0 < \sqrt{2gl}$. Ist dagegen $v_0 > \sqrt{2gl}$, so
 kann v nie verschwinden, und es kann also die Bewegung nie eine vorüberende
 sein, sondern der Körper durchläuft die ganze Kreisbewegung, immer in
 demselben Sinne sich bewegend. Man bemerkt aber, daß jede folgende
 Oszillation oder jeder folgende Umlauf mit jener ersten Reise von
 Geschwindigkeiten zeigt wie der vorhergehende. Die Dauer u. Amplitude
 jeder Oszillation wird daher die nämliche sein, auf eine Ausnahme der
 Bewegung ist man nur durch Berücksichtigung kleiner Widerstände
 geföhrt, die sich außer Acht gelassen sind. —

Die Gleichung der lebendigen Kraft gibt einen neuen Beweis des Prin-
 cips der erhaltenen Geschwindigkeiten. Denn sollen die Kräfte bei der Gleich-
 gewicht fallen, so muß die Bewegung, welche man dem Körper schon mit-
 getheilt denken kann, in der Höhe seiner Pufferkraftlage eine gleich-
 förmige sein; d. h. es muß bei geringen Entfernungen von demselben
 $v^2 = v_0^2$, oder die kleine für die zurückgelegte Strecke entsprechende Arbeit
 Null sein. Aber dies muß der Fall sein, in welcher Richtung auf von
 seiner Gleichgewichtslage aus man sich den Punkt bewegt denkt, vorausgesetzt

daß die Bewegung mit den ihm aufgelegten Bedingungen verträglich ist.
 Dies ist aber nicht anderes als beständig der Willkür des Bewusstseins.

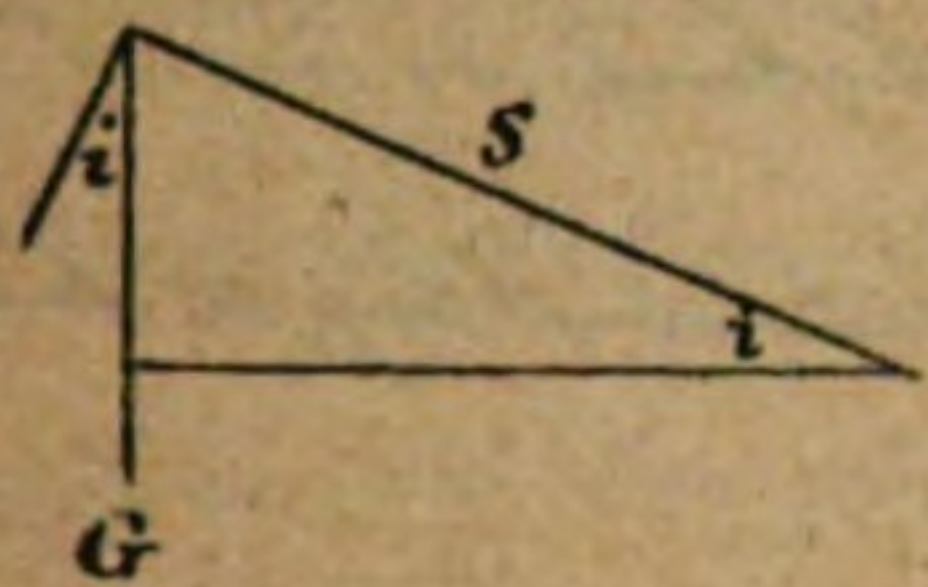
§. 15. Von der Reibung

Ein Körper, welcher auf einer materiellen Basis bewegt, und sich
 von dieser aber in der That nicht als einen Ganzen, welcher seiner Be-
 wegung in unendlicher Richtung verfindert, sondern die Basis nicht zugleich
 einer gewissen Richtung auf den Körper aus in der Richtung seiner
 Bewegung. Diese zusammenfassende Kraft, die Reibung, welche dadurch be-
 dingt ist, daß der Körper auf seiner Basis gleitet, ist unabhängig von
 der Gefährlichkeit mit welcher sich der Körper bewegt; sie stellt sich als einen
 Widerstand des unendlichen Widerstands dar, welchen der Körper gegen die Basis
 entbehrt. Ist daher P die Resultante des Kräftegleichgewichts, unter dessen Einfluß
 der Körper sich bewegt, und α der Winkel, welchen sie gegen die angegebene
 Richtung der Bewegung bildet, so ist $P \sin \alpha$ der Normaldruck, welchen
 die Basis erfährt. (Setzen wir uns voraus, daß dieser Druck den Körper
 wirklich gegen die Basis preßt, so ist die Kraft, mit welcher die Reibung in der
 Richtung der Bewegung diesen entgegenwirkt, large stellt sich die Formel

$$- n. P \sin \alpha,$$

wo n ein Gleitkoeffizient ist, welchen man kleiner ist als 1, und
 welcher nur von dem Material der Basis u. des Körpers abhängig ist.
 so heißt der Reibungskoeffizient. Denken wir uns den Körper auf
 einer horizontalen Ebene bewegt, mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 , wel-
 che die horizontale Ebene gerade hinabpreßt ist. Die Arbeit der Reibungs-
 Kraft ist, nachdem der Körper eine Strecke s zurückgelegt hat,

$G \sin i$, die Arbeit der Reibung aber, da sie gegen die Ebene und
gerade, dem die Normalkomponente des Gewichtes $G \cos i$, mit



$- n G \cos i \cdot S$, so daß die Gleichung der lebendigen Kraft
die Gestalt annimmt:

$$23. \quad \frac{G}{g} \cdot \frac{v^2 - v_0^2}{2} = G S (\sin i - n \cos i), \text{ oder}$$

$$24. \quad v = \sqrt{v_0^2 + 2gS(\sin i - n \cos i)}.$$

Ist daher $\sin i > n \cos i$, so gleitet der Körper mit unendlicher Beschleunigung
hinabwärts, indem nur verfließen mit der Bewegung des freien Falls,
die Beschleunigung g den verminderten Werth $g(\sin i - n \cos i)$ annimmt.

Ist dagegen $\sin i < n \cos i$ so wird die Beschleunigung negativ, der Körper
bewegt sich mit abnehmender Geschwindigkeit, und bleibt endlich stehen,
wofür man den Weg $S = \frac{v_0^2}{2g(n \cos i - \sin i)}$

bestimmt findet, indem man da an die Formel 24 für v einen imaginären
Werth setzen würde. In diesem Falle würde er also ohne eine
Anfangsgeschwindigkeit sich überfließen muß bewegen. Der erste Fall, wo
bei stärkerer Neigung der Ebene die Schwerkraft überwiegt, u. der zweite,
wo bei schwächerer Neigung die summirte Kraft der Reibung die
Anfangsgeschwindigkeit überfließen muß bewegen. Der erste Fall, wo
Ebene, für welche $\sin i = n \cos i$, $\operatorname{tg} i = n$.

Bei dieser Neigung fällt die Reibung (Schwerkraft genau der Gleit-
gewicht, und der Körper, wenn er eine Anfangsgeschwindigkeit hat,
bewegt sich mit ihr gleichförmig abwärts. Den entgegengesetzten Werth von i ,
welcher durch r bezeichnet sein mag, und welcher aus der Gleichung,

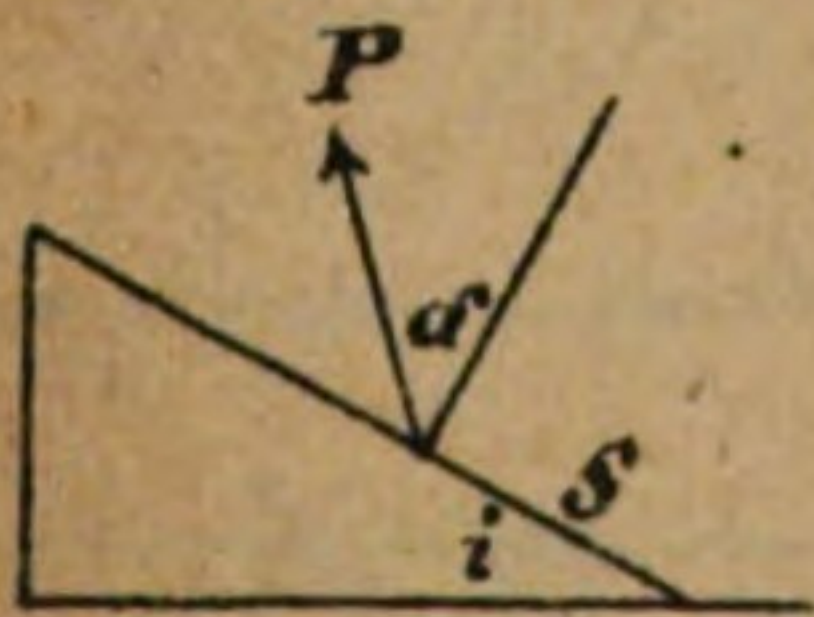
$$24. \quad n = \operatorname{tg} r$$

gefunden wird, nennt man den Richtungswinkel, mit dem man das Kräftepaar stellt das Reibungscoefficienten einführen. Die Gleichung 24. gibt bei Gelegenheit der Gleichung S. 14. 22 angewandte Formeln für die Fortgeschwindigkeit beim Fall auf der schieben Ebene. Nennen wir x den vertical hinuntergehenden Theil, α den in horizontaler Richtung hinuntergehenden, so ist offenbar

$$x = s \cos i \quad x = s \sin i. \quad \text{Also geht 24. über in}$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2g(x - \mu x)}$$

Die Fortgeschwindigkeit ist also nicht allein von der Fallhöhe x abhängig, sondern auch noch von der horizontalen Theil x , aber in einem Theile, daß dieselbe bei verschiedenen μ , d. h. bei verschiedenen Reibung aus der Formel hervorgeht. Im Fall ist es, da die Bewegung gleichförmig beschleunigt ist, leicht zu berechnen.



Es sei Körper zugleich einer Kraft P unterworfen, deren Richtung mit der nach oben gerichteten Normalen den Winkel α bildet, und welche den Körper aufwärts zieht, so wird natürlich sowohl die unmittelbare Beschleunigung verändert, als auch der Druck, welchen die schiebe Ebene ausübt u. d. h. die Größe der Reibung. Denn da jetzt der Körper nicht mehr mit der Kraft $G \cos i$ auf die Ebene drückt, sondern nur mit der Kraft $G \cos i - P \cos \alpha$, so wird auf die Reibung gegeben durch

$$\mu g r (G \cos i - P \cos \alpha);$$

so wird vermehrt oder vermindert, je nachdem die Normalenkomponente der Zugkraft P nach der inneren oder äußeren Seite der Ebene gerichtet ist. Dann geht aber die Gleichung der lebendigen Kraft über in

$$\frac{G}{g} \frac{v^2 - v_0^2}{2} = (-G \sin i + P \sin \alpha) s - \mu g r s (G \cos i - P \cos \alpha)$$

25. --

$$= \frac{s}{\cos r} \{-G \sin(i+r) + P \sin(\alpha+r)\},$$

schon allseitig vorausgesetzt ist, daß $G \cos i > P \cos \alpha$, damit überführt von einer Richtung nach der andern sein kann. Vollste Zugkraft muß der Akt sein, daß die Körper in einer gleichförmigen Bewegung verfallt, d. h. daß die den gemeinsamen Widerstand der Richtung u. der Reibkraft eben nur überwindet, so muß die Reibkraft nachgefragt, d. h. man muß haben:

26 - - -

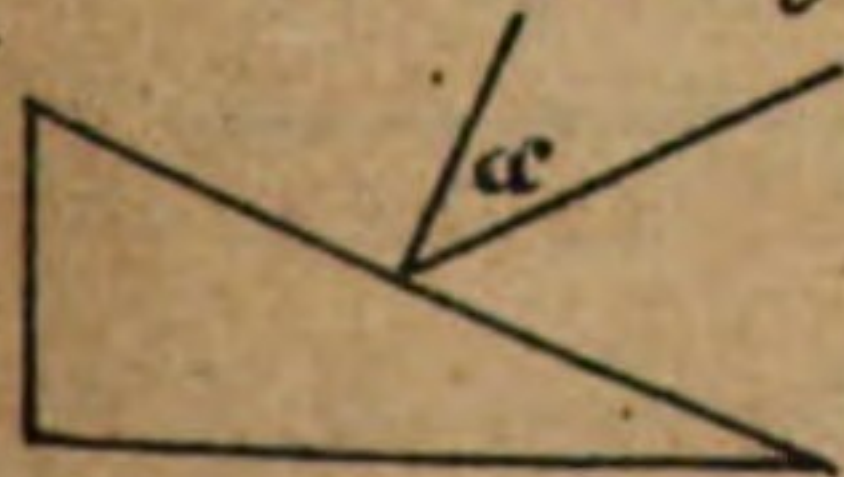
$$P = \frac{G \sin(i+r)}{\sin(\alpha+r)}$$

Den kleinsten Werth annimmt die Zugkraft, wenn $\alpha + r = 90$, d. h. wenn die unter dem Reibungswinkel gegen die Ebene der Bewegung geneigt ist. Es wird dann der Werth an

27. - - -

$$P = G \sin(i+r)$$

Es ist sehr zu bemerken, daß die günstigste Kraftwirkung nur anwendbar ist, so lange die aus der Verbindung von 26 mit der Ungleichung $G \cos i > P \cos \alpha$ fließende Ungleichung $\alpha > i$ erfüllt bleibt; d. h. so lange $i+r < 90$. Ist dagegen $i+r > 90$, so ist, weil $\alpha > i$ sein muß, der Nenner $\sin(\alpha+r)$ immer kleiner als der Zähler $\sin(i+r)$, und die Kraft P nimmt den kleinsten Werth an ($P = G$) wenn $\alpha = i$, d. h. wenn sie in Richtung der Verticalen angebracht ist. Ist die Kraft P so gerichtet, daß sie den Körper nach unten zieht, so ist der Akt der Reibkraft, welche jetzt ins Innere der Bewegung wirkt, das entgegengegesetzte Zeichen zuzusetzen, und aus 26 erfüllt man



$$28 - - - \frac{G}{g} \frac{v^2 - v_0^2}{2} = (G \sin i + P \sin \alpha) s - \text{ogr. } s(G \cos i - P \cos \alpha)$$

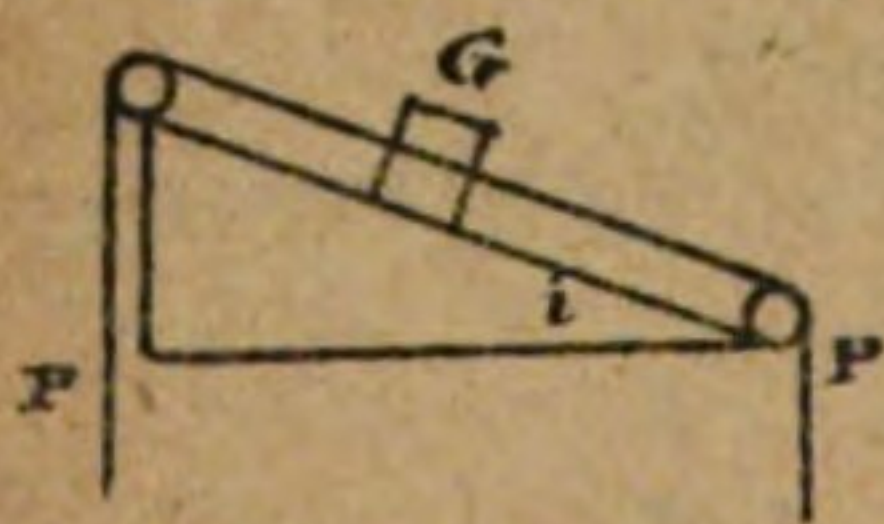
$$= \frac{s}{\cos r} \{ G \sin(i-r) + P \sin(\alpha+r) \},$$

verwendet, damit der Körper überführt auf der Ebene bleibe $G \cos i > P \cos \alpha$ sein muß. Die Bewegung kann in diesem Fall eine gleichförmige sein, wenn $r > i$, und P muß dann den Werth annehmen:

29 - - -

$$P = G \frac{\sin(r-i)}{\sin(r+\alpha)}$$

was wirksam den geringsten Widerstand für die Zugkraft gibt, wenn sie gegen die Ebene des Winkels r bildet. Man kann nach der Größe eines Gewichtes fragen, welches, so angebracht, daß es in der Richtung der Ebene wirkt, gerade aufwärts das Gewicht des Widerstandes getragen wird. Man erhält dies aus 26. 29. wenn $\alpha = 90^\circ$ setzt.)



also wenn das Gewicht abwärts wirkt:

$$P = G \frac{\sin(r-i)}{\cos r}, \text{ wenn aufwärts:}$$

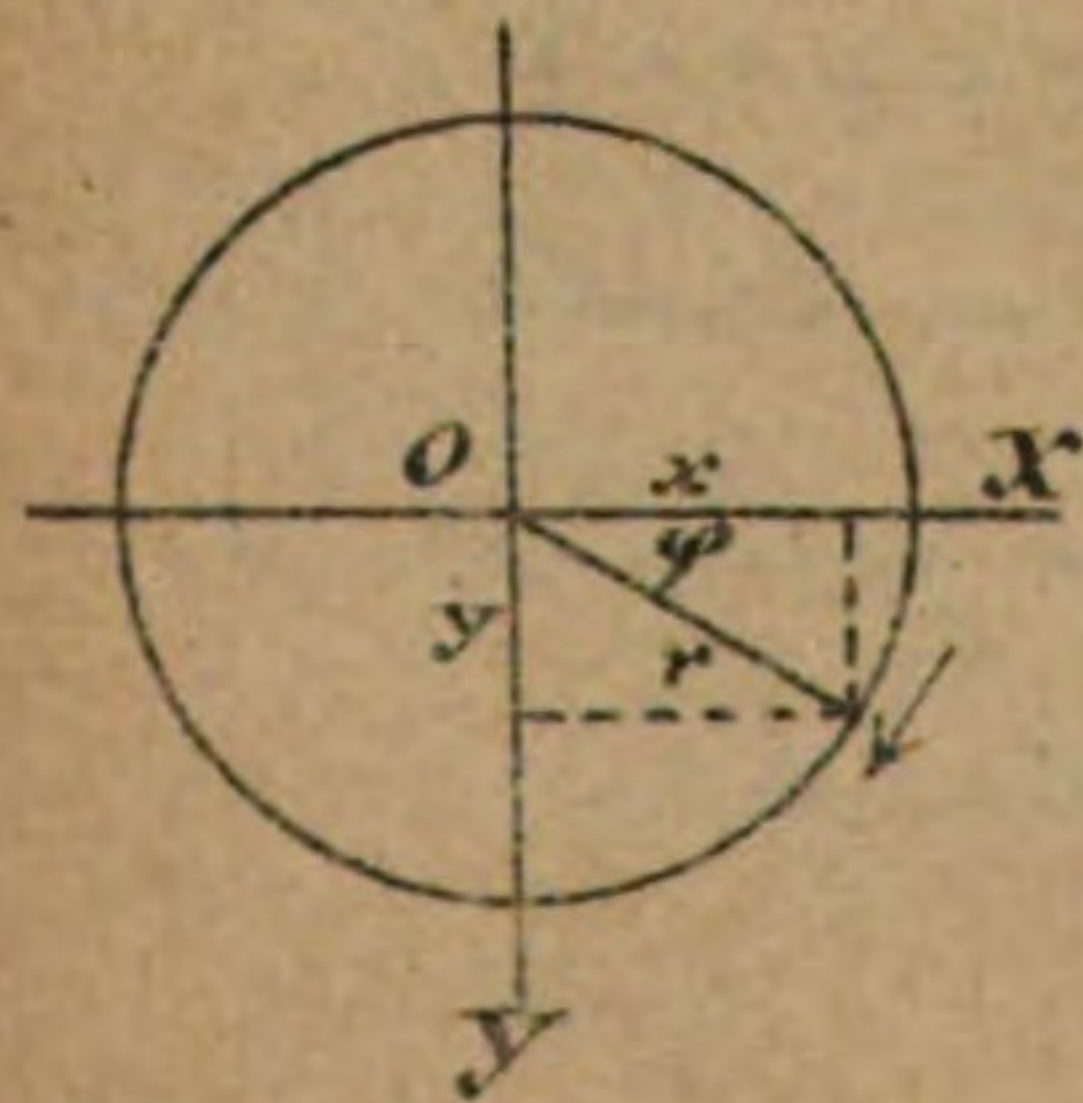
$$P = G \frac{\sin(r+i)}{\cos r}.$$

für kleineres Gewicht möchte getragen werden, im größeren aber eine Bewegung hervorbringen.

S. 16. Kleine Schwingungen eines Pendels.

Es ist in S. 7. gezeigt worden, daß ein Körper, der in jedem Augenblicke die momentane Beschleunigung $\frac{v^2}{r}$ gegen ein festes Centrum erfährt, eine Kreisbewegung annimmt, sobald er im Anfangs von jenem Centrum um r entfernt war, und eine Geschwindigkeit v senkrecht gegen die Verbindungslinie erhalten hatte. Man kann sich May, Geschwindigkeit, Beschleunigung dieser Bewegung nach zwei senkrechten Coordinaten zerlegen, und so zwei geradlinige Bewegungen entstehen lassen, deren jede für sich betrachtet werden kann. Denn jede der Komponenten der Beschleunigung muß, allein wirkend dem Punkte auf diejenige Komponente der Geschwindigkeit wirken, in derjenigen May durchlaufen lassen, welches der Projection des Punktes senkrecht zukommt.

Wenn Ox , Oy zwei senkrechte senkrechte Richtungen. Ist P der Winkel, welchen die augenblickliche Richtung des Punktes gegen die x Axe bildet, so sind die durchlaufenen Wege der Projectionen:



$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

Die Geschwindigkeit, welche die Richtung des Punktes hat, bildet mit der x den Winkel $90 + \varphi$ und φ . Daher sind die Geschwindigkeiten der Projectionen:

$$u = -v \sin \varphi \quad v = v \cos \varphi.$$

endlich bildet die Bestimmung mit den Arcen den Winkel $180 - \varphi, 90 + \varphi$.

also sind die Bestimmungen der Projectionen:

$$p = - \frac{v^2}{r} \cos \varphi \quad q = - \frac{v^2}{r} \sin \varphi.$$

Aber es weißt der Winkel φ sich zeitproportional, da sich der wirkliche Punkt gleichförmig bewegt. Bekannt ist der kreisförmige Weg $r \cdot \varphi = vt$, also

$$\varphi = \frac{v}{r} t.$$

Setzt man also $\frac{v}{r} = m$, und betrachtet die Bewegung der Projection auf der x Axe allein, so hat man die folgenden zusammengefügten Weg, Geschwindigkeit

und Bestimmungen:

$$x = r \cos(mt)$$

$$v = -mr \sin(mt)$$

$$p = -m^2 r \cos(mt) = -m^2 x.$$

Man sieht es also mit der Bewegung eines Punktes zu thun, welcher sich geradlinig bewegt, indem er im Anfang der Bewegung auf der x Axe in der Entfernung r von 0 ohne Anfangsgeschwindigkeit steht, fortwährend aber von einer negativen d. h. gegen 0 zu gerichteten Beschleunigung angezogen wird, welche der Entfernung von 0 proportional ist. Nennen wir also $\frac{a}{g}$ das Gewicht des Punktes, so daß $\frac{a}{g} m^2 x$ die wirkende Kraft gilt, so kann man folgenden Satz aufstellen:

Ein Punkt, welcher in der Entfernung r von einem angezogenen Centrum ohne Anfangsgeschwindigkeit aufgestellt, von diesem mit der Kraft $\frac{a}{g} m^2 x$ angezogen wird, was x die veränderliche Entfernung von dem Centrum bedeutet, bewegt sich geradlinig oscillierend um dasselbe, indem es nach Verlauf der Zeit t die Geschwindigkeit besitzt.

$$30 - - - v = -mr \sin(mt)$$

und sich in der Entfernung

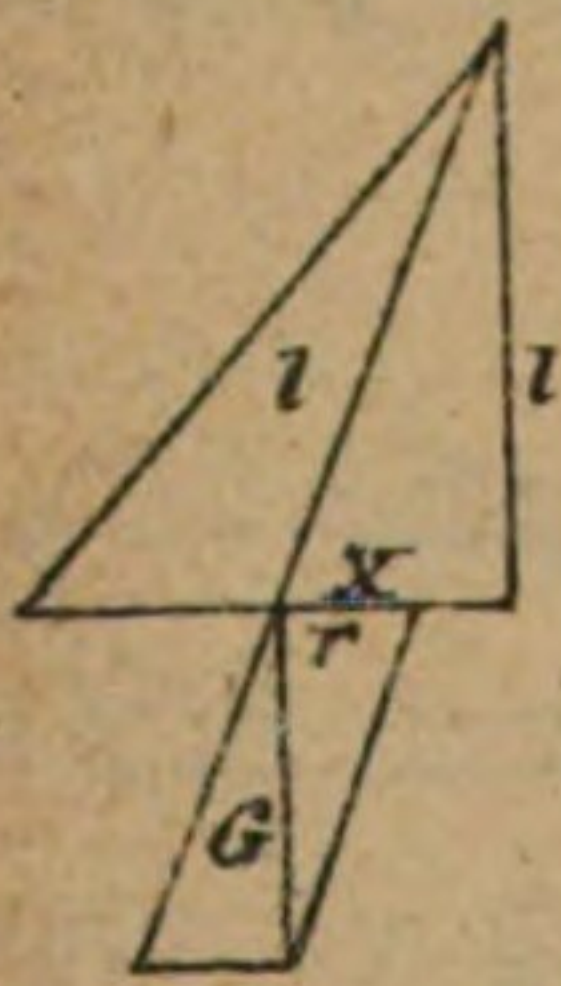
$$31 - - - x = r \cos(mt)$$

von dem Centrum befindet.

man sieht, daß der Punkt fortwährend gleiche Oscillationen zwischen den Ab-
ständen $+r$ und $-r$ von dem Centrum ausführt, seine Geschwindigkeit ist am größ-
ten, nämlich $= \pi r$, wenn er durch das Centrum hindurchgeht; sie wird ab je
weiter der Punkt vom Centrum entfernt ist, in proportion für die Entfernungen
des Punks. Der Punkt befindet sich endlos immer wieder in demselben Zustande,
sobald mit ihm 2π verfahren, d. h. sobald diese Zeit

$$32 \quad \quad \quad T = \frac{2\pi}{m}$$

verfloßen ist. Man nennt diese Zeit T die Dauer einer Oscillation; nachher
kann derselben beginnt der Punkt immer wieder die nämliche Bewegung.
Diese Bewegungen gestalten unter anderem eine Anwendung auf ein Pen-
del, welches in kleinen Oscillationen um seine Ruhelage begreifen ist; und
welches sich eine Bewegung des Luftwiderstandes zu gestalten im
leeren Raum bewegt. Man darf hier wegen der Kleinheit der Oscillationen
annehmen, daß der an dem festen T aufgefängte Punkt sich geradlinig
bewegt. Wenn sich der Punkt dann um x von der Ruhelage entfernt hat, so



kann man in Betracht setzen, daß eine Tangente
auf den festen aufgegeben wird, die andere der Punkt aber
in die Ruhelage zurückzieht, u. die letztere hat dann den Druck

$$= G \frac{x}{l};$$

so daß die vorliegende Aufgabe in der That unter der eben
gegebenen Gestalt der Beschleunigung fällt, wenn man setzt

$$m = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Es wird also, wenn t die geistige Entfernung des Punktes von der Ruhelage
bedeutet:

$$x = r \cos(t \sqrt{\frac{g}{l}}), \quad u = -r \sqrt{\frac{g}{l}} \sin(t \sqrt{\frac{g}{l}}),$$

und die Dauer einer Oscillation ist:

33 - - - $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$.

Man zeige es mittelst der, statt x den Flangatenwinkel φ einzuführen, welche eine unendliche Lage des Punktes mit der Verticalen bildet. Ist zugleich α der zu T gehörige größte Flangatenwinkel, so hat man wegen der Kleinheit der Bogen: $x = l \cdot \varphi$, $r = l \cdot \alpha$, und weil,

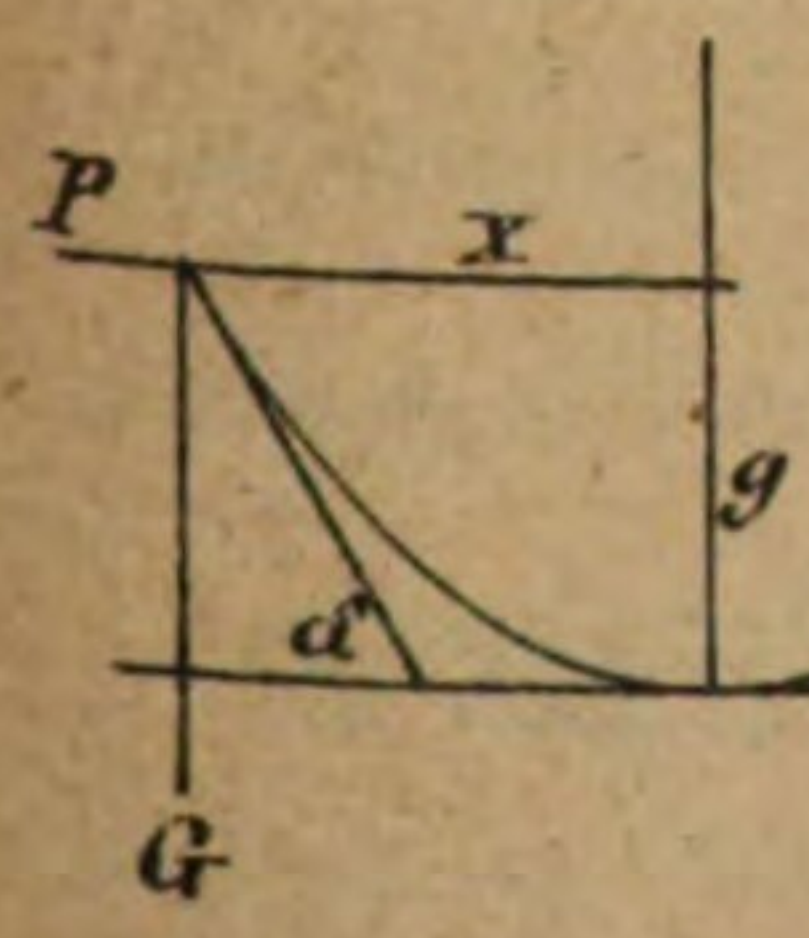
weil die Winkelgeschwindigkeit ist $v = l \cdot \omega$; und daher die Formeln

$$\varphi = \alpha \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t\right).$$

$$\omega = -\alpha \sqrt{\frac{g}{l}} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t\right).$$

Es ist also $\alpha \cdot \sqrt{gl}$ die innerste kreisförmige, größte Geschwindigkeit des Punktes, welche er inner beim Durchgange durch die Verticalen annimmt. Der Punkt für die Bewegungsdauer ist nicht genau bestimmt. Diese Betrachtungen sind nur so wichtig, als man sich ihrer zur Bestimmung von g d. h. zur Bestimmung des Werths des Schwerekraks bedient hat.

Derselbe Versuch läßt sich aber auch zur Bestimmung der Beschleunigung eines Punktes um seine Gleichgewichtslage anwenden, wenn derselbe genügt ist, sich auf einer Kurve zu bewegen. Es mag unsere Aufmerksamkeit auf die Aufgabe 3 des I. 13 für eine Kugel lenken.



Ein Punkt befindet sich auf einer Kugel, durch sein Gewicht Q in. durch eine horizontale Kraft bewegt. Wird er aus der Ruhelage um eine Strecke s entfernt, so wird er in dieselbe zurückgezogen durch die Kraft

34 - - - $Q \sin \alpha = P \cos \alpha$, oder da $\tan \alpha = \frac{x}{p}$, und weil

weil $x^2 = 2px$ die Gleichung der Parabel ist $\tan \alpha = \frac{x}{p}$, durch die Kraft

35 - - - $\frac{Qx - Pp}{\sqrt{x^2 + p^2}}$.

aber da S ein sehr kleines Element ist, welches man als gerade Linie betrachten kann, so kann man setzen:

$$x = x_0 + S \operatorname{tg} \alpha_0,$$

wo x_0 und α_0 die Coordinaten und der Tangentenwinkel für die Aufhänge sind. für die muß die Tangentialkraft null werden, d. h. es muß sein (nach 34. 35)

$$G \sin \alpha_0 - P \cos \alpha_0 = 0, \quad G x_0 - P p = 0.$$

Es ist $\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{P}{G}$, $x_0 = \frac{Pp}{G}$; und die Kraft 35 geht über in

36 ---

$$\frac{S P G}{P \sqrt{G^2 + P^2}},$$

indem man im Nenner die kleine Größe S fallläßt. Man set also wieder die Kraft P der G , welche den Punkt in die Aufhänge zurückzieht, d. h. das Gleichgewicht ist stabil. Und der Körper führt Oszillationen aus. Wenn man aus der Formel 32 findet, wenn man die Kraft 36 einsetzt in Bestimmung umfaßt, u. die gleich $m^2 S$ setzt; so daß also

$$m^2 = \frac{P}{\sqrt{P^2 + G^2}}.$$

Die Oszillationstauer ist daher

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{P \sqrt{P^2 + G^2}}{g P}}$$

d. h. dieselbe wie bei einem einfachen Pendel, dessen Länge nach der Gleichung

$$\frac{P \sqrt{P^2 + G^2}}{P} = \frac{P}{\sin \alpha_0}$$

gegeben ist.

Diese Formeln setzen uns voraus, daß die Kraft P nicht sehr gegen G sehr klein ist.

§. Von starren Körpern

1.

Betrachten wir nunmehr ein System von materiellen Punkten, dessen jedes von einem beliebigem System von Kräften angegriffen wird. Die einfachste Annahme, welche man über ein solches System machen kann, ist die, daß alle Punkte eine unveränderliche Lage gegeneinander einnehmen, so daß die äußeren Kräfte für gegenseitigen Zusammenhang zu vergrößern oder zu verkleinern nicht im Stande sind. Man muß sich vorstellen, daß diese Voraussetzung für Bestimmung findet durch die Wirkung von äußeren Kräften, welche man innere nennt, u. durch welche die Punkte des Systems gegenseitig aufeinander wirken. Stellen wir uns vor, daß je zwei Punkte des Systems auf einander eine Wirkung ausüben, welche nach ihrer Richtungslinie gemessen ist u. welche von der gegenseitigen Entfernung der Punkte abhängig ist. Wenn nun die äußeren Kräfte solche je zwei Punkte einander im Stande setzen, so wird durch diese Veränderung der Entfernung die zwischen den Punkten wirkende Wirkung eine abnehmende; mit man kann sich vorstellen, daß diese Kraft sich mit wachsender Entfernung so schnell vergrößert, daß die Veränderung der Entfernung überhaupst unmerklich bleibt, sobald die Größe der äußeren Kräfte gewisse Grenzen nicht überschreitet. Nur eben so kann man die Wirkung der Punkte sich in eine anziehende übergefaßt denken, sobald die abstoßende Entfernung etwas vergrößert wird; mit anderen Worten kann diese Anziehung sich beliebig schnell zunehmen, um eine Vergrößerung der Entfernung einem merklichen Abnahmefähigkeit zu lassen. Bei dieser Aufsehungweise heißt man, daß äußere Kräfte, welcher immer gewisse Grenzen liegen, nicht im Stande sein werden, die gegenseitige Lage der Punkte eines solchen Systems merklich zu verändern; u. daß man also mit großer Annäherung diese Lage als unveränderlich ansehen kann.

Ein System, welches unter diesem Gesichtspunkte betrachtet werden kann, nennt man einen flüssigen Körper. Hält man sich dagegen vor, daß die äusseren Kräfte, von außen herein, so sehr merklich in diese Wirkung hervorgehen, so werden ganz allmählich kleine Verformungen der Punkte gegenseitig hervorbringen können; so daß, selbst dieselben für gewisse Tage miteinander umformen, sobald die Wirkung der äusseren Kräfte aufhört. Das System von Punkten bildet dann einen elastischen Körper. Und auf diese Aufsammlungweise werden die äusseren Kräfte gewisse Grenzen nicht überschreiten können; gehen sie über dieselben hinaus, so findet eine bleibende Formänderung oder eine vollständige Zerkümmung des Systems statt.

Man bemerkt also, daß ein flüssiger Körper im Ganzen nichts ist, als die ideale Grenze, welche sich ein elastischer Körper nähert, bei welchem die inneren Kräfte bei geringster Verformung der materiellen Theile des Körpers so gleichförmig und ununterbrochen einander entgegenwirken, daß die Theile des flüssigen Körpers als eine einzige Annäherung für die Theorie der elastischen Körper betrachtet werden, indem die die großen localen Veränderungen des ganzen Systems ins Auge faßt, die kleinen inneren Veränderungen aber nicht berücksichtigt.

Über die Natur der hier eingeführten inneren Kräfte mag uns bemerkt sein, daß man zwei Theile einander anzieht, indem das erste auf das zweite denselben Zug ausübt, wie das zweite auf das erste, nur in entgegengesetzter Richtung.

Das allgemeine Naturgesetz ist es, welches als Prinzip der Gleichheit der Action und der Reaction bekannt ist. Um nun die Wirkung eines beliebigen Kräftesystems auf einen flüssigen Körper zu bestimmen, bedient man sich zunächst des folgenden Grundsatzes:

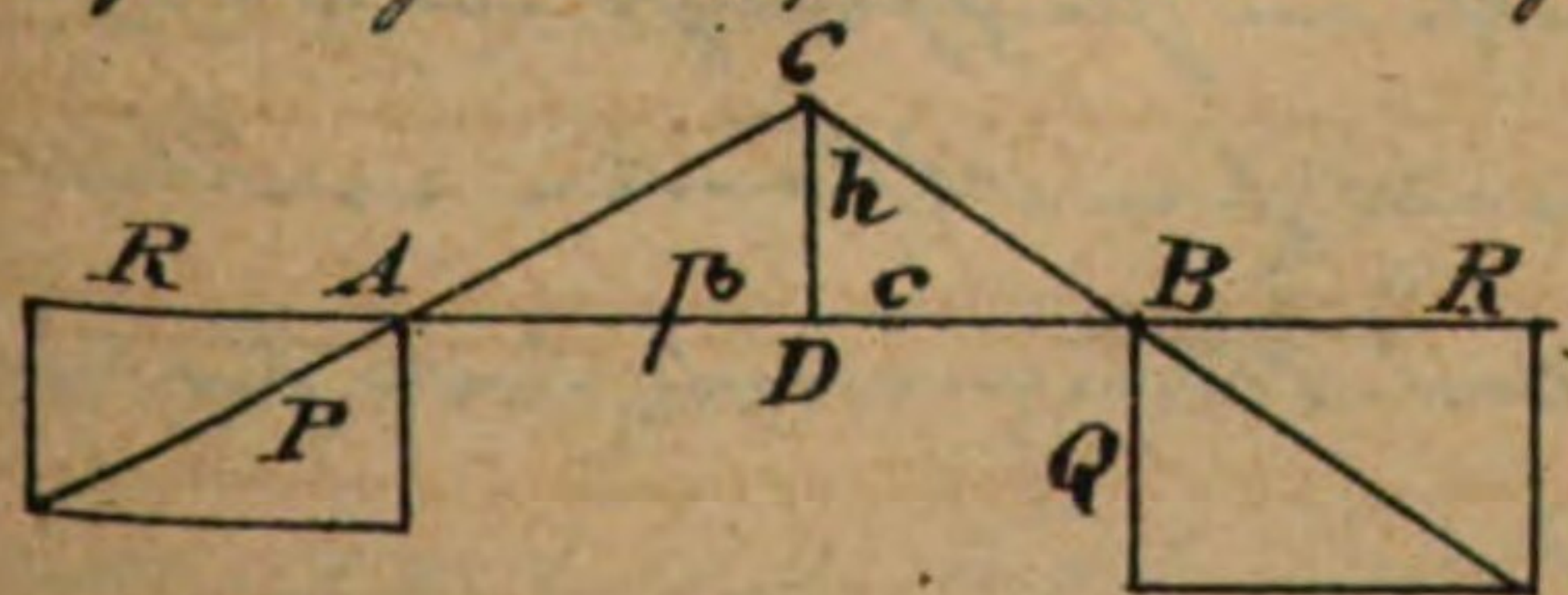
Ein Kraft, welche in einem bestimmten Punkte eines flüssigen Körpers angewandt

kann man sich statt dessen in einem beliebigen Punkte der Richtungslinie
angewandt denken, ohne dass die Wirkung der Kraft dadurch verändert wird.

Man kann sich diesen Grundsatz auf folgende Weise verständlich machen. Sei AB die Richtungslinie der Kraft, und BC zwei nachfolgende Punkte $\xrightarrow{A} \xrightarrow{B} \xrightarrow{C}$ der Kräfte, welche auf dieser Linie liegen. B sei der wirkliche Angriffspunkt der Kraft. Denken wir uns die Kraft nun zugleich auch in C angewandt, und noch einmal in B , also hier in umgekehrter Richtung. Da diese letzten beiden Kräfte gleich sind, und also als innere Kräfte wirken, so sind sie uns bekannt, die Theile BC einander zu versetzen, und ihre Wirkung verflüchtigt gegenüber der Gegenwirkung der inneren Kräfte, welche sich bei der kleinsten Veränderung der Entfernung BC entwickeln. Die Hinzufügung dieser Kräfte ändert also nichts an dem Zustande des Krügers. Es aber auf die beiden in B wirkenden Kräfte einander aufheben, so bleibt die in C wirkende Kraft übrig, durch welche man die ursprüngliche ersetzen kann, und welche sich von jener nur durch die Verlegung des Angriffspunktes unterscheidet.

§. 18. Vom Hebel.

Betrachten wir zunächst einen Krüger, auf welchen zwei parallele Kräfte PQ einwirken, deren senkrechter Abstand a ist. Es soll bestimmt werden, durch welche einzelnen Kraft die Verbindung dieser beiden Kräfte zu ersetzen ist.



Denken wir uns die Kräfte PQ an den Endpunkten der Linie $AB = a$ angewandt. Dann können wir offenbar in der Richtung von AB zwei gleiche u. entgegengesetzte Kräfte R anbringen, ohne daß dadurch der Zustand des Krügers

verändert wird, wenn wir die Kräfte PQ durch eine einzige Kraft R ersetzen, die in der Mitte der Linie AB wirkt.

gründet wird, dann diese beiden Kräfte wirken wie in einem einzigen Punkte,
und geschehen wie also. Setzen wir aber R und P und Q zu zwei Resultanten
zusammen, so befinden sich diese in C , und wir können also alle vier Kräfte
in dem Punkte C wirken lassen. Dann aber geschehen wie die Kräfte R wirkt,
auf, und es bleibt die Kraft $P + Q$ übrig, welche in der Richtung CD wirkt. Und
man kann also das System P Q durch eine Kraft $P + Q$ ersetzen, welche im
Punkte D angreift. Die Lage von D auf AB ist noch zu bestimmen. Es folgt
aber aus der Äquilibrium der Hebel

$$1. \dots \frac{P}{b} = \frac{P}{R}, \quad \frac{P}{c} = \frac{Q}{R}, \quad \text{also } Pb = Qc,$$

d. h. der Punkt D theilt AB im umgekehrten Verhältniß der Kräfte.
Und es ergibt sich weiter leicht, da noch $b + c = a$ ist:

$$2. \dots b = \frac{Qa}{P+Q}, \quad c = \frac{Pa}{P+Q}.$$

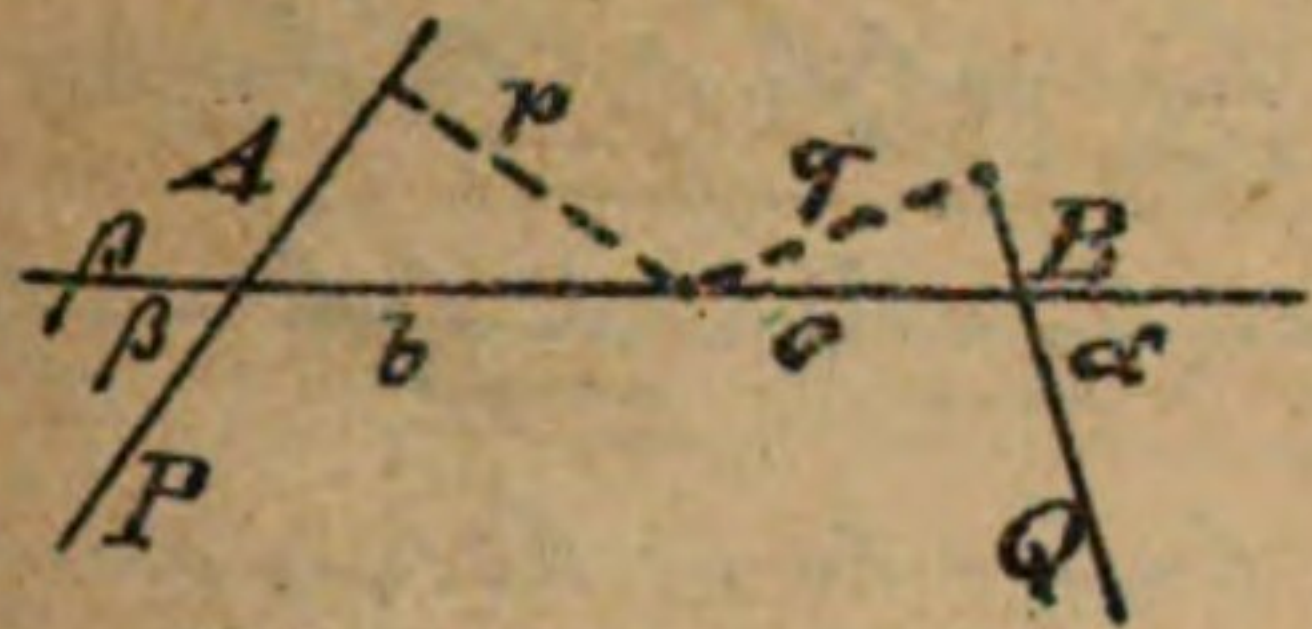
Der Punkt D gibt zugleich den Punkt an, in welchem der Körper unter
Hülfe werden kann, um den Einfluß der Kräfte P Q zu geschehen. Den eine
Kraft $P + Q$, der Resultanten entgegenzusetzen u. in diesem Punkte angre-
ben, ist im Grunde, die Wirkung von P u. Q vollkommen anzufassen.

Man versetzt unter einem Hebel in mathematischer Sinne eine starr-
gleichförmige Linie, deren Punkte von Kräften angegriffen werden. Ein Hebel
 AB , auf den die Kräfte P Q einwirken, ist also im Gleichgewicht, wenn er so
unterstützt ist, daß die Produkte der Kräfte mit ihren Abständen vom Unter-
stützungspunkte auf beiden Seiten gleich sind. Man nennt diese Produkte
die statischen Momente der Kräfte.

Es läßt sich leicht auf den Fall übertragen, wo die Kräfte nicht mehr gegen

ten Hebel punktförmig wirken, sondern mit demselben die Winkel β γ bilden. Zerlegt man dann die Kräfte in die Komponenten $P \cos \beta$, $Q \cos \gamma$, welche in die Richtung des Hebels fallen, mit in die Komponenten $P \sin \beta$, $Q \sin \gamma$ senkrecht gegen denselben, so setzen sich die letzteren unmittelbar zu einem resultirenden Punkte:

$$P \cos \beta = Q \cos \gamma$$



zusammen, welches der Aufstüzpunkt entspricht, so folgt, die letzteren aber gegeben nach dem Prinzip der Gleichung

$$P \sin \beta \cdot b = Q \sin \gamma \cdot c$$

zur Bestimmung des Aufstüzpunktes. Aber die Ausdrücke $b \sin \beta$ $c \sin \gamma$ sind nicht anders als die Abstände p q der Kräfte P Q vom Aufstüzpunkt, und die Gleichungsbedingung geht über in

$$P p = Q q,$$

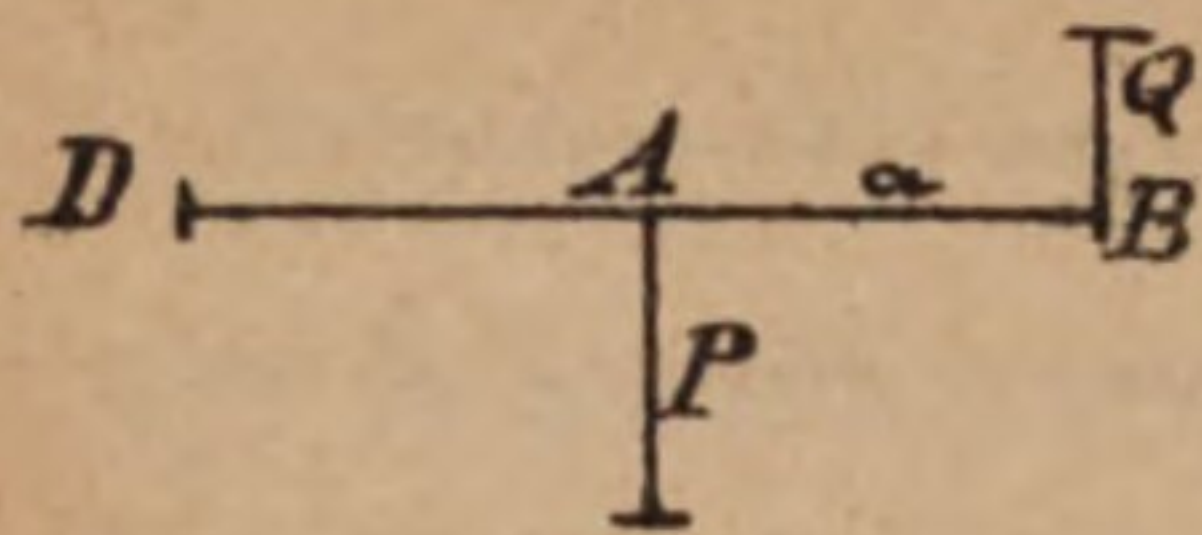
d. h. wiederum muß die Summe der statischen Momente auf beiden Seiten dieselbe sein.

Der Aufstüzpunkt fällt auf die Linie AB selbst nur sobald die senkrechten Komponenten in denselben Sinne gerichtet sind. (Setzen wir dagegen in der Formeln 2. — Q für Q , und nehmen also Q mit P entgegengekehrt gerichtet an, so wird)

$$b = - \frac{Q a}{P - Q}, \quad c = \frac{P a}{P - Q}.$$

ist also P die größte Kraft, so wird b negativ, d. h. der Aufstüzpunkt fällt auf die Verlängerung des Hebels, und zwar nach der Seite der größeren Kraft zu, so daß die größere Kraft an dem kleineren Hebelarm wirkt. Die Anwendungen des Hebels beruhen sämtlich auf dieser Eigenschaft, daß

6.



eine kleinere Kraft im Punkte Q einer größeren des
gleichermaßen zu halten, so als wäre ein kleinerer
Hebelarm wirkend.

Beachten wir noch insbesondere den Fall, wo die Kraft Q mit P entgegengerichtet
gesetzt gewesen ist, die größte hebelnde Kraft aber dieselbe ist. In diesem Fall
ist die Resultierende $P + Q$ gleich Null; der Angriffspunkt aber wirkt ins
Unendliche, so der Hebelarm von B nach C sich erstreckt. Ein solches System
also, welches aus zwei gleichem und entgegengesetzten Kräften besteht, welche
tief einem Hebelarm a getrennt sind, versteht man besonders als Hebelpaar.
Man nennt ein solches System ein Kräftepaar.

§. 19. Von Kräftepaaren.

Es soll jetzt untersucht werden, welches die wesentlichen, unveränderlichen
Eigenschaften eines Kräftepaars sind, und welche Veränderungen man
sagen und einem solchen beibringen kann, ohne daß die Wirkung desselben
auf verändert. Es gelten über ein Kräftepaar die nachfolgenden Sätze:

Satz 1. Ein Kräftepaar kann in Richtung seines Hebelarms beliebig
parallel verschoben werden.

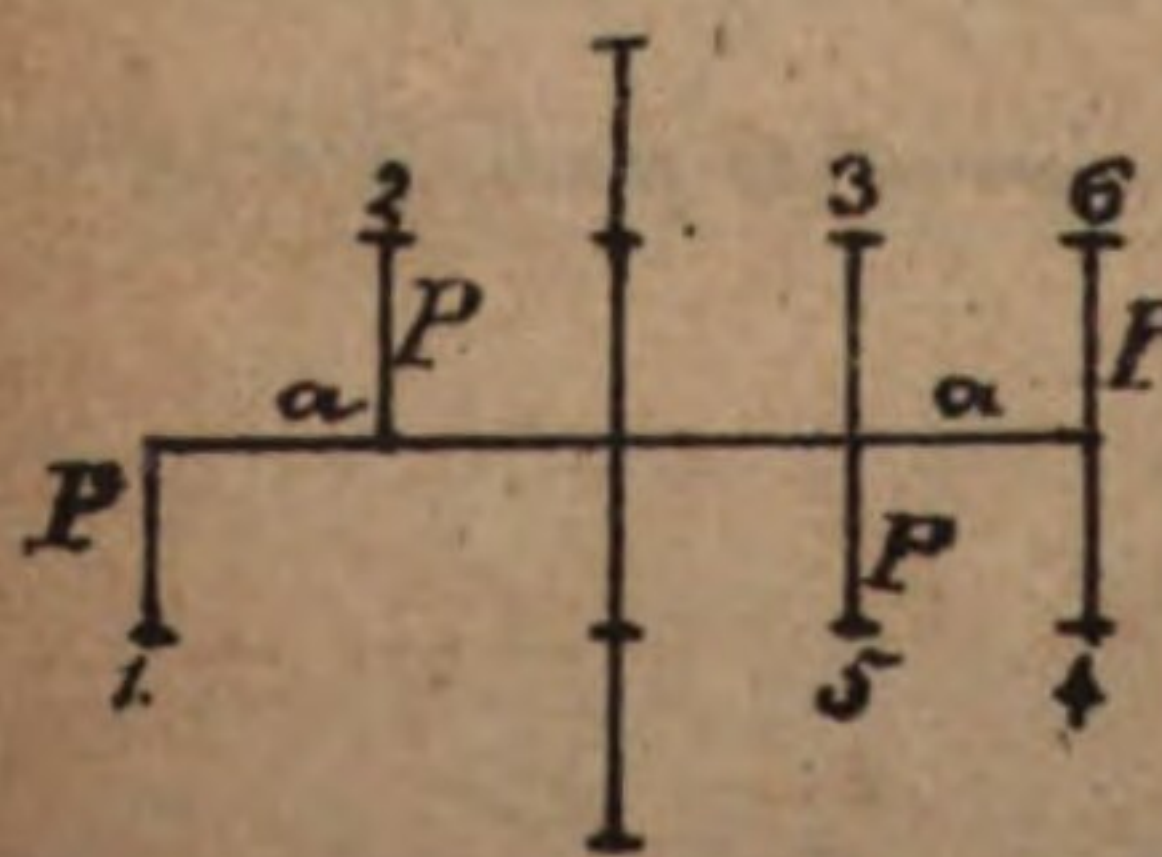


Fig. 1, 2 das gegebene Kräftepaar. Leiten wir in zwei
Punkten der Richtung seines Hebelarms, deren Abstand
unverändert dem Hebelarm gleich ist, gleiche u. entge-
gerichtete Kräfte 3, 4, 5, 6. an, welche den Kräften 1, 2.

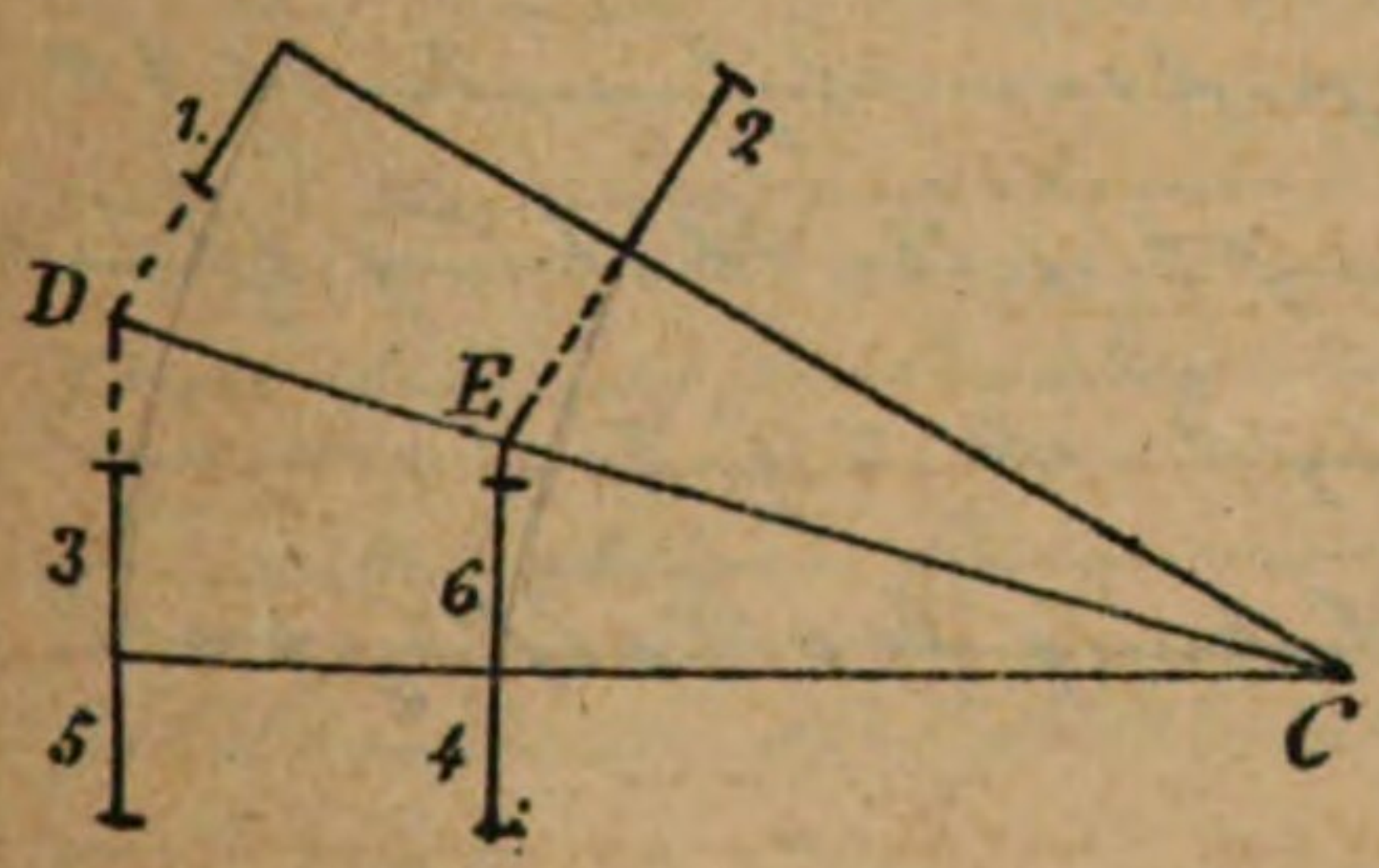
gleich sind. Dann kann man nach dem Satze des Hebelb 2 mit 3. durch
eine Kraft 2 P ersetzen welche von 2 u. 3 gleich weit absteht; mit ebenso
1 u. 4. durch eine gleiche Kraft. Da nun aber diese beiden Resultierenden

auffehen, so gehöret die Kräfte 1. 2. 3. 4, u. es bleibt nur das Paar 5 6 übrig, welche denselben Wirkung thun muß wie 1 2.

Satz 2. Man kann das Kräftepaar auf in der Richtung der Kräfte parallel verschieben.

Dies folgt zugleich aus dem allgemeinen Satze über die Parallelität des Angriffspunktes einer Kraft.

Satz 3. Ein Kräftepaar kann in seiner Ebene um einen beliebigen Punkt auf der Linie seines Hebelsarmes gedreht werden.



Die 1 2 des gegebenen Kräftepaars, C der Angriffspunkt, 5 6 die neue Lage. Bringen wir die 3 4 gleich in entgegen gesetzten Kräfte 3. 4. 5. 6 an, so haben wir diese sämmtlich auf und die Wirkung des Paares 1 2 ist nun nicht verändert. Also man kann 1 mit 3 in D und

2 mit 4. in E zu Resultanten zusammensetzen, welche die gleiche Wirkung, wie C, haben, und die Kräfte 5 6 gleich u. entgegengesetzt sind. Jedem also diese Resultanten wir gehöret, haben wir auf die Kräfte 1. 2. 3 auf, und es bleibt nur das Kräftepaar 5 6 übrig, welche denselben Wirkung thun muß wie das gegebene 1. 2.

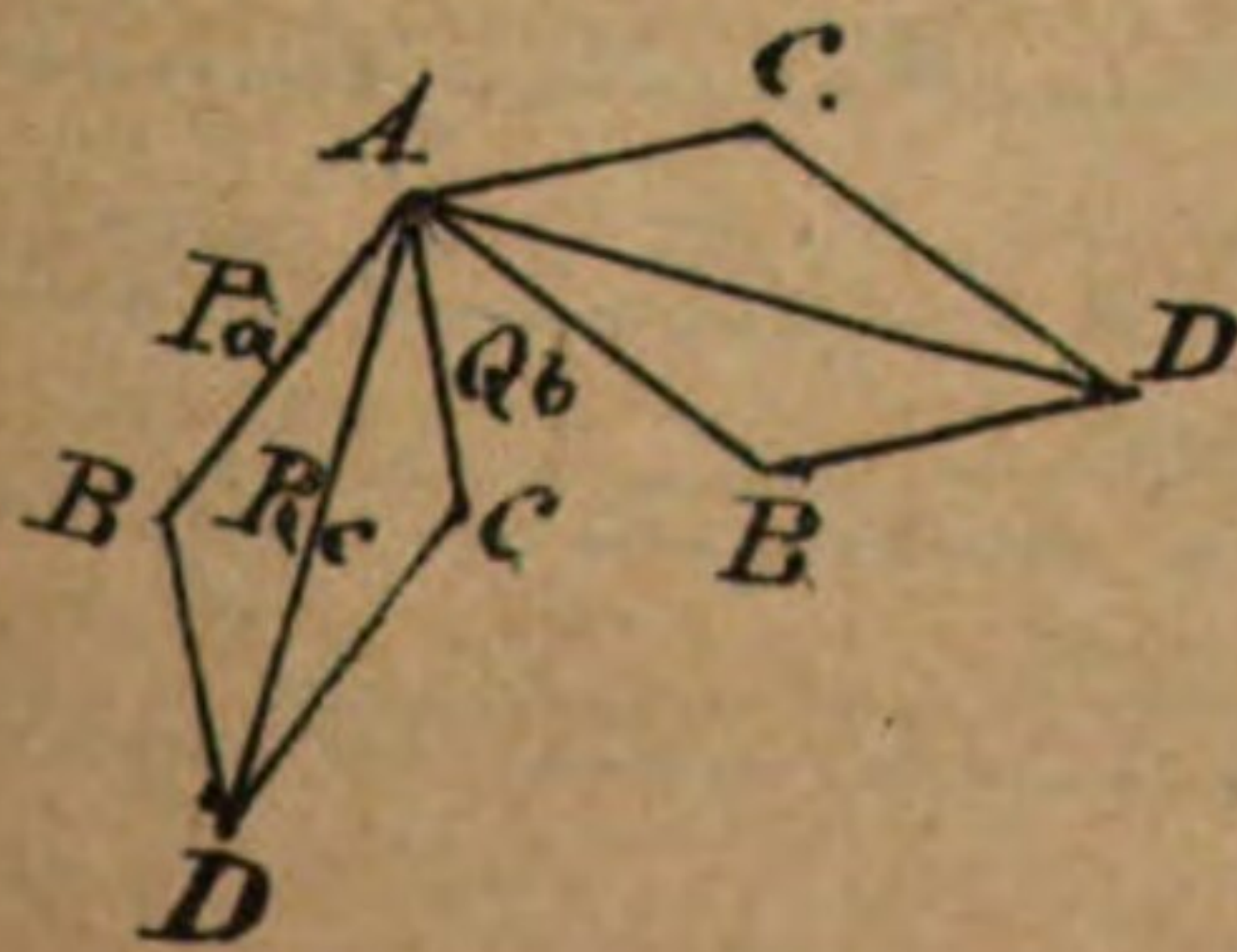
Diese drei Sätze lassen sich in den folgenden zusammenfassen, indem man nur alle drei Kräfte gleichzeitig antworten läßt.

Satz 4. Man kann dem Kräftepaar in seiner Ebene jede beliebige Lage geben ohne seine Wirkung zu ändern.

Die geometrische Lage gleichzeit eines Kräftepaars ist nachfolgend.

unverändertlich und für das Kräftepaar charakteristisch ist. Ist es zugleich die Richtung des Actes des Kräftepaars, d. h. die Richtung, welche gegen die Ebene des Paars perpendicular ist, u. in welcher das Resultat des Kräftepaars zu suchen besteht ist. Folglich also das Produkt aus Kraft u. Hebelarm; man nennt es das Moment des Paars; es ist in der That die Größe der statischen Momente eines beliebigen Kräftepaars in Bezug auf eine beliebige Perpendicular gegen seine Ebene größter Entfernung. Wenn wir x der Abstand eines der Acte des Kräftepaars von der Perpendicular ist, so ist der Abstand von der andern $x + a$; also die beiden statischen Momente $P(x + a)$ und $-Px$, deren Summe eben Pa ist.

Aus den oben gegebenen Sätzen folgen nunmehr die Regeln über die Zusammensetzung der Kräftepaare. Zwei Paare mit den Momenten Pa , Qb , welche in beliebigen Ebenen aufzufallen sind, kann man immer so legen, daß sie in einer Hebelarmen in der Symmetrie beider Ebenen fallen. Aber nach dem 6. Satze kann man sie ferner auf den Hebelarm reduzieren, wenn man nur den Kräftepaar die Werte Pa , Qb beibehält, damit die Momente unverändert bleiben. Da nun die Hebelarme gleich sind, kann man sie vollends zusammen fallen lassen, u. in diesem Fall kann man den Fußpunkt der Kräfte Pa , Qb nach dem Parallellogramm der Kräfte vereinigen, so daß man das resultierende Paar. Ist die Ebene der Zusammensetzung gegen die Symmetrie des Paars perpendicular, diese Linie und ein Fußpunkt des Hebelarms durch A dargestellt.



Die Ebene des Paars ist parallel der Zusammensetzung in der Linie man AB , AC , diese Linien stellen zugleich die Kräfte dar; AD gibt die Ebene des resultierenden Kräftepaars, und zugleich das Moment Rc desselben.

Nachdem diese Konstruktion in der angegebenen Weise durchgeführt, kann man sie auf die Augen der Kräftepaare übertragen (AC, AB, AD); und es fällt dann unmittelbar folgende Konstruktion, bei der nur die unveränderten Elemente des Raums benutzt sind:

Man ziehe durch einen beliebigen Punkt des Auges des Raums, bezogen auf denselben, den die Momente an, in Folge derselben auf dem Kräftepaarallelogramm zusammen. Richtung u. Größe des Resultats des Kräftepaars gibt den die Augen u. das Moment des resultierenden Kräftepaars.

Dieser Satz gilt aber ebenfalls für die Zerlegung eines Kräftepaars in mehrere andere, wie für die Zusammensetzung mehrerer Kräftepaare zu einem einzigen. Man bemerkt, daß jeder Punkt, von welchem aus die Augen zu ziehen sind, ganz beliebig ist; daß man also bei einem beliebigen System von Kräftepaaren alle Augen auf einen Punkt legen kann, u. die dann zusammengesetzten zu einem einzigen Raume. Ein System von Kräftepaaren läßt sich daher stets durch ein einziges ersetzen. Ebenso kann man aber jedes Paar in drei rechtwinklige Komponenten zerlegen, d. h. in drei Paare, deren Augen drei gegebene auf einer unter Punkt A liegenden Linie sind. Jedes System von Kräftepaaren läßt sich also durch drei Paare ersetzen, deren Augen die Koordinatenachsen sind.

§. 20. Reduction eines beliebigen Kräftesystems.

Man ist nach dieser Vorbereitung im Stande, ein beliebiges Kräftesystem welches auf einen Körper wirkt, auf die geringste Anzahl von Kräften zurückzuführen. Sei nämlich A ein ganz beliebiger Punkt des Körpers, P eine der Kräfte, welche auf den Körper einwirken. Bringen wir nun in A zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte P und $-P$ an so können wir $-P$ mit

ein gegebenes Kraft P zu einem Kräftepaar zusammenzusetzen. Man bleibt in A ein Kraft P übrig, so daß man statt der ursprünglichen Kraft P je gleiche Kraft erfüllt, deren Angriffspunkt auf A verfallen ist, u. im Kräftepaar. Hieraus folgt so gleich, daß man alle Kräfte, welche auf einen Körper wirken, auf einem solchen beliebigen Punkte A hin verlegen können, wenn man nur ein entsprechendes Kräftepaar hinzufügt. Man erhält also statt eines beliebigen Kräftesystems ein System von Kräftepaaren, u. außerdem die Kräfte des nämlichen Systems, aber vereinigt in einem einzigen Punkt O .

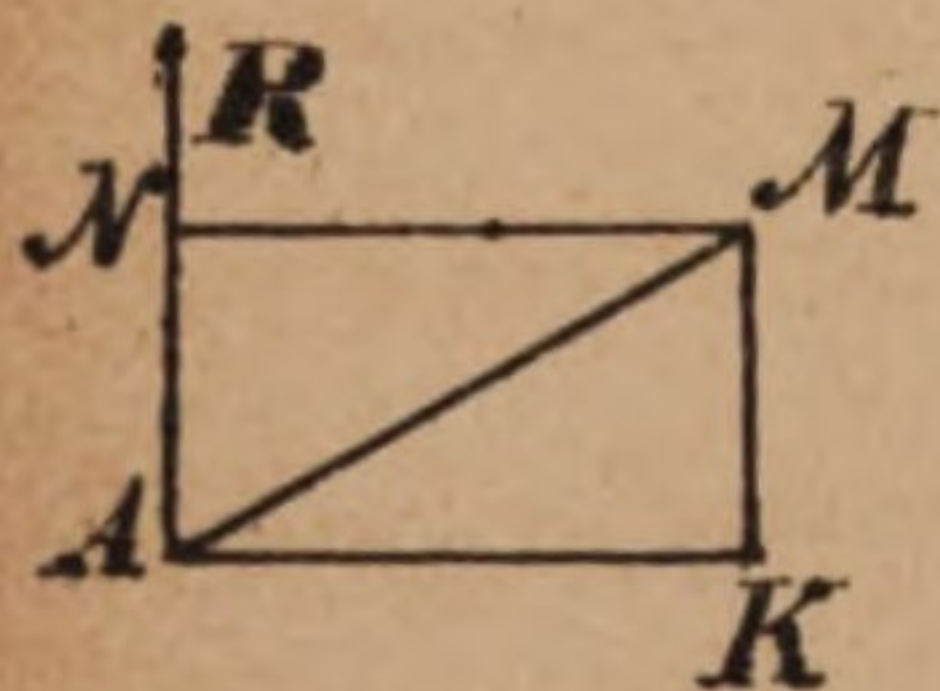
Da nun ein System von Kräften, welches in einem Punkte angreift, sich auf eine Resultante zurückführen läßt u. ebenso ein System von Kräftepaaren sich zu einem Paare zusammensetzt, so ist der Satz bewiesen:

Ein System von Kräften, welches auf einen Körper wirkt, läßt sich ersetzen durch eine resultierende Kraft mit beliebigem Angriffspunkte, und durch ein resultierendes Kräftepaar.

Diese Art der Reducirung entfällt nach zwei willkürliche Größen, nämlich die Coordinaten des Angriffspunktes, diese verstanden in der That nur die Stelle von zwei Größen, denn da man eine Kraft in jeder Richtung beliebig vertheilen kann, so kann man den Angriffspunkt auf einem Punkte einer beliebig gewählten Ebene z. B. der $X Y$ Ebene verlegen, ohne den Effect der Kraft zu verändern. Man kann also den Angriffspunkt der Resultanten in der $X Y$ Ebene annehmen, ohne die Allgemeinheit der Betrachtung zu beschränken; mit diesem ist dann vollständig bestimmt durch die Coordinaten $X Y$.

Diese beiden willkürlichen Größen kann man nun so bestimmen, daß die Axe der resultierenden Kraft mit der resultierenden Kraft zusammenfällt, u. die Aufgabe

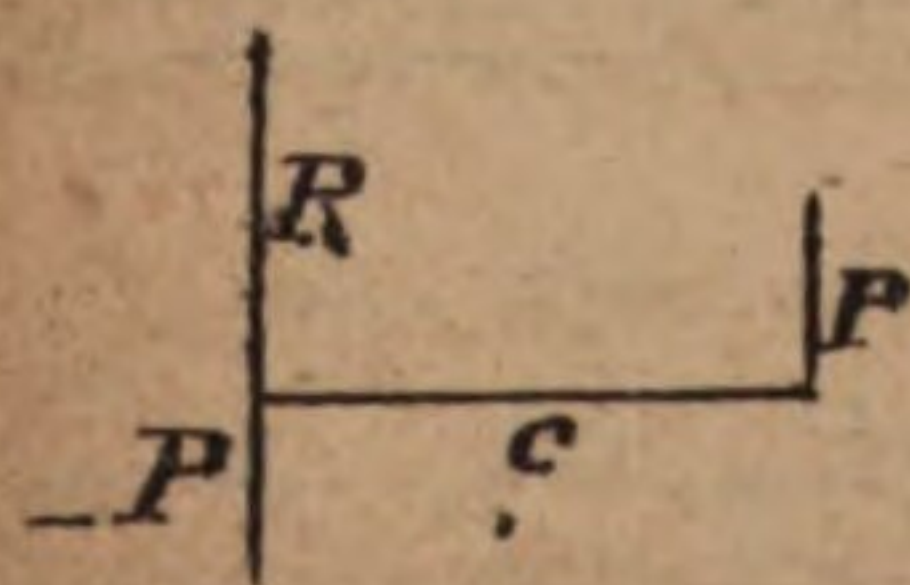
der Reduction eines beliebigen Kräftesystems nicht kann eine bestimmte
 jenen nur nämlich durch den Angriffspunkt A in den gegebenen Resultanten
 in A das resultirende Paar $A M$, und stellt zugleich $A M$ das Moment
 des Paares dar, so kann man dasselbe zerlegen in die Momente $A N$ und $A K$. Das



Moment $A N$ gehört zum einem Paar an, dessen $A M$ mit R
 zusammenfällt, das Moment $A K$ aber einem Kräftepaar,
 in dessen Ebene R liegt.

Man kann also ein Kräftepaar mit einer in seiner Ebene
 liegenden Kraft immer zu einer Kraft vereinigen, welche in gegebenem Abstand
 ist und nur einen anderen Angriffspunkt hat.

In der That: sei R die Kraft, P mit $-P$ die Kräfte des Paares, dem wir die in
 der Zeichnung angegebene Lage theilen können. Es folgt auf unmittelbarer R mit



$-P$ zu der Kraft $R - P$ zusammen, dann aber nach dem Gesetz
 des Hebel's $R - P$ mit P zu einer Kraft, welche der Linie
 über c gleich ist, d. h. $= R$ und deren Angriffspunkt den Punkt

c im umgekehrten Verhältnisse der Kräfte trifft. Es folgt daher der Satz:

Man kann ein beliebiges System vereinigen zu einem Resultanten, u. zu einem
 Kräftepaar, dessen $A M$ mit der Richtung derselben zusammenfällt.

Man bemerkt nun, daß $A N$ stets kleiner ist als $A M$, d. h. daß dies auf diese
Weise gewonnenes Kräftepaar unter allen das kleinste Moment hat.

I. 21. Formeln für diese Reduction

Seien $P, P_2, \dots$ die Kräfte, welche in den Punkten x, y, z, x_2, y_2, z_2 etc. feststehend
 angehen, und die Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \dots$ mit den $A x$ bilden. (Neben-
 liegen wir zunächst alle diese Kräfte auf einem beliebigen Punkte A , dessen

Kräftigen a, b, c sind, und setzen gemäß die Kräfte P zu einem Resultanten zusammen, dessen Größe R sein mag, welche mit den Arcen des Winkels PQR bildet. Man setze man nach den Formeln über die Zusammensetzung von Kräften, die auf einen Punkt wirken, die Gleichungen (S. 10, 8)

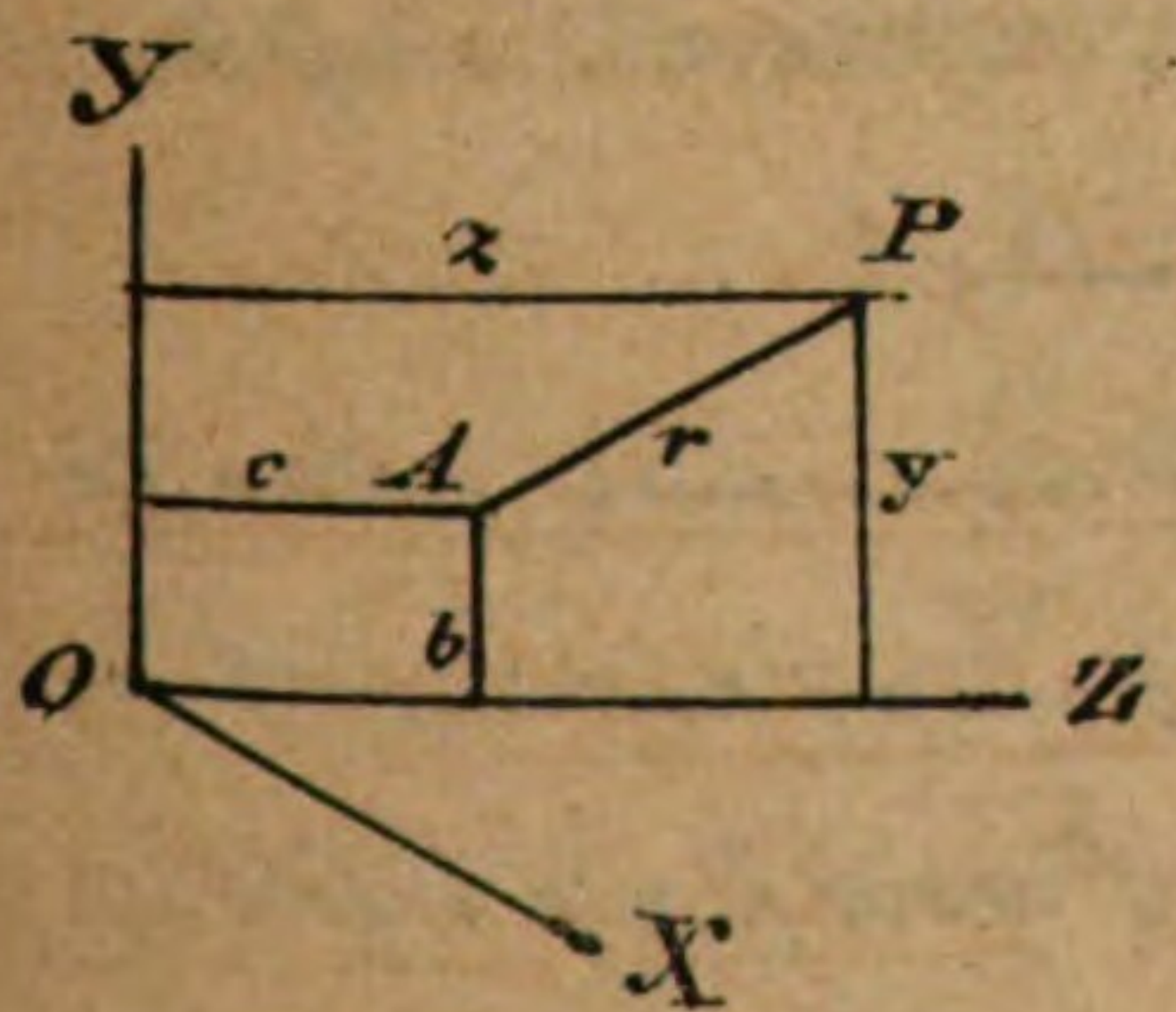
$$R \cos p = P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + \dots = \sum P \cos \alpha = A$$

$$B \dots R \cos q = P_1 \cos \beta_1 + P_2 \cos \beta_2 + \dots = \sum P \cos \beta = B$$

$$R \cos r = P_1 \cos \gamma_1 + P_2 \cos \gamma_2 + \dots = \sum P \cos \gamma = C,$$

wenn wir nach ABC die Summendarstellungen nach den drei Coordinaten eingehen. Aus diesen Gleichungen ist die Größe des Resultanten, sowie der Winkel pqr vollständig bestimmt.

Es kommt nun darauf an, die Kräftepaare, welche durch die Wirkung der Kräfte auf dem Punkte A übergeliefert sind, zu einem einzigen zu vereinigen. Sei P eine der Kräfte des gegebenen Systems, und α, β, γ die Winkel der Kraft gegen die Arcen. Bei der Wirkung der Kraft P auf A



zerfallen wie immer in ein Kräftepaar, welches durch die gegebenen Kraft P in A übergeliefert wird. Gelegentlich ist die Kraft P gebildet. Gelegentlich ist die Kraft P gebildet. Gelegentlich ist die Kraft P gebildet.

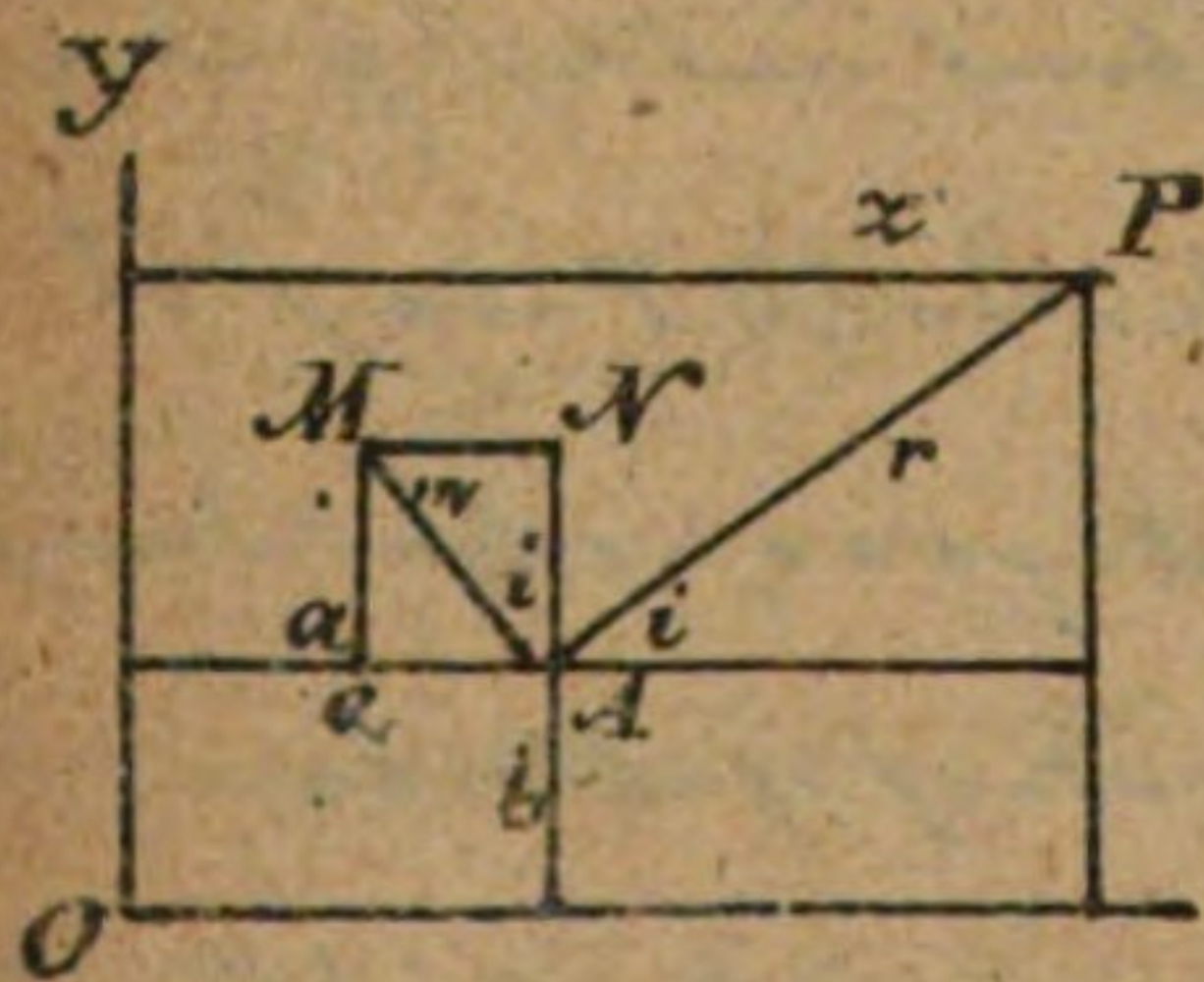
in die vermittelnden Komponenten $P \cos \alpha, P \cos \beta,$

$P \cos \gamma$, so zerfallen wie die Kräftepaare, welche bezüglich

dieser Komponenten zu Kräftepaaren haben, in. Es sei jetzt nur eine der Kräfte, welche einer der Coordinatenachsen parallel ist. Betrachten wir gemäß des Falls, dass die Kraft $P \cos \alpha$ ist. Ist die Kraft der X Achse parallel, so können wir sie in der YZ Ebene angreifen lassen, in dem Punkte, der in der Richtung der AP angestrichelt ist; die Kräftepaare der Kraft sind gegen die Richtung

punkte; der Hebelarm des Paares ist also $AP = r$ selbst, und sein Moment
 $Pr = d$.

Dies Moment soll nun auf der Axe des Paares eingetragen werden. Aber
 zugleich soll die Richtung der Axe, nach welcher wir dasselbe eingetragen
 werden, in welchem Sinne das Paar den Körper zu drehen bestrebt ist. Bei aller die
 Regel festgehalten, daß wenn man von der Seite des angegebenen Moments
auf das Kräftepaar tritt, tiefen der Körper in denselben Sinne zu drehen be-
strebt sein soll, wie sich der Finger einer Uhr bewegt. Ein in entgegenge-
 setzten Sinne drehendes Paar würde sein Moment auf der entgegenge-
 setzten Verlängerung seiner Axe stehen, oder was dasselbe ist, ein Moment von ent-
 gegengesetztem Zeichen. Lohnt man sich also die x Axe in der Zeichnung
 auf oben gerichtet und daselbst die Kraft $P \cos \alpha$, falls sie nach und



ist das Moment des Paares positiv ist, so erhält man
 die angegebene Richtung AM des Moments
 $m = Pr \cos \alpha$. Zerlegt man dies Moment nach den
 Axen, so erhält man die Momente

$AN = Pr \cos \alpha \cos i$ und $AQ = Pr \cos \alpha \sin i$; oder da
 $r \cos i = x - c$, $r \sin i = y - b$, so werden dieselben

$$AN = P \cos \alpha (x - c), \quad AQ = P \cos \alpha (y - b).$$

Aber von letzteren Momenten ist das negative Zeichen anzusetzen, wenn wir
 die Momente der gegebenen Paare in Richtung der Coordinatenachsen positiv setzen wollen;
 da, wie man sieht, das Moment AQ der x Axe entgegen gerichtet ist.

Setzt man nun die gefundenen Momente, welche mehrere Paare angeben,
 die um die Coordinatenachsen drehen, zusammen, und sucht zugleich für

die Tangenten $P \cos \beta$ und $P \cos \gamma$ ebenfalls auch noch für $P \cos \alpha$ gelten ist, so erhält man aus jenen Tangentengleichungen, in. und durch das Lösen von ihnen:

$$\begin{array}{llll} \text{trifft man die} & x \text{ bzw.} & y \text{ bzw.} & z \text{ bzw.} \\ \text{aus } P \cos \alpha & \dots & P \cos \alpha (x-c) - P \cos \alpha (y-b) & \\ \text{aus } P \cos \beta & - P \cos \beta (x-c) & \dots & P \cos \beta (x-a) \\ \text{aus } P \cos \gamma & P \cos \gamma (y-b) - P \cos \gamma (x-a) & \dots & \end{array}$$

Da man nun die Momente der Paare, welche um die nämliche Axe laufen, ins. aufsummieren kann (so werden die Momente der resultierenden Paare nach 3 Axen

$$\Sigma P(\cos \gamma (y-b) - \cos \beta (x-c)), \Sigma P(\cos \alpha (x-c) - \cos \gamma (x-a)), \Sigma P(\cos \beta (x-a) - \cos \alpha (y-b))$$

Null, also M das Moment des resultierenden Paares vor, u, v, w die Winkel seiner Axe gegen die Coordinatenachsen, so kann man M nach 3 Axen zerlegen in 3 Theile, deren Momente bezuglich sind

$$M \cos u, \quad M \cos v, \quad M \cos w;$$

Die Paare müssen also den oben gegebenen Tinnern gleich sein d. h. man muß die Gleichungen haben

$$M \cos u = \Sigma P(\cos \gamma (y-b) - \cos \beta (x-c))$$

$$M \cos v = \Sigma P(\cos \alpha (x-c) - \cos \gamma (x-a))$$

$$M \cos w = \Sigma P(\cos \beta (x-a) - \cos \alpha (y-b)).$$

Die Tinnern dieser ersten drei aber kann man weglassen, in. die a, b, c ent. fallenden Glieder absenden. Löst man dies aus in. bemerkt, daß $\Sigma P \cos \gamma b = b \Sigma P \cos \gamma$, weil b für alle Theile der Tinnern denselben Werth hat mit, und weil wegen der Gleichungen $b = b R \cos r$, so gehen die obigen Gleichungen über in:

$$M \cos u + R(b \cos r - c \cos q) = \Sigma P(y \cos \gamma - x \cos \beta) = A'$$

$$M \cos v + R(c \cos p - a \cos r) = \Sigma P(x \cos \alpha - x \cos \gamma) = B'$$

$$M \cos w + R(a \cos q - b \cos p) = \Sigma P(x \cos \beta - y \cos \alpha) = C'$$

Diese Gleichungen dienen zur Bestimmung von M u. v w , wenn a b c gegeben sind. Ist aber das Angriffspunkt des Resultirenden willkürlich, so kann man, wie oben gezeigt, die drei Kräftepaare mit der Richtung des resultirenden Kräfte zusammenfallen lassen, d. h. man kann setzen:

$$u = p, \quad v = q, \quad w = r.$$

Dann lautet M das oben erwähnte kleinste Kräftepaar u. die Gleichungen 2 gehen über in:

$$M \cos p + R(b \cos r - c \cos q) = \sum P(y \cos \gamma - x \cos \beta) = A'$$

$$5--- M \cos q + R(c \cos p - a \cos r) = \sum P(x \cos \alpha - y \cos \gamma) = B'$$

$$M \cos r + R(a \cos q - b \cos p) = \sum P(x \cos \beta - y \cos \alpha) = C'$$

Multipliziert man diese Gleichungen aber mit $R \cos p$, $R \cos q$, $R \cos r$, und bemerkt, daß $\cos^2 p + \cos^2 q + \cos^2 r = 1$, und setzt zugleich auf der rechten Seite für jenen Multiplikator jenen Werth aus 3, so kommt:

$$6--- M.R = A A' + B B' + C C'$$

Da R aus 1 bekannt ist so ergibt sich daraus unmittelbar der Werth des kleinsten Kräftepaars M . Man sieht aber zugleich, daß man im Allgemeinen nicht ohne ein solches Kräftepaar auskommt, sondern, daß man eine Resultirende allein nur dann einführen darf, wenn $M = 0$ ist, d. h. wenn die Kräfte der Bestimmung genügen:

$$7--- A A' + B B' + C C' = 0.$$

Wenn man aber M aus der Gleichung 6 bestimmt hat, so kann man auch den Coordinaten a b c für willkürlich annehmen, u. dann aus jenen drei Gleichungen 6 die Seiten anzuordnen. Die Lage des Angriffspunktes ist natürlich nicht vollständig bestimmt, da man ihn sich in der Richtung des Resultirenden beliebig beliebig verschieben denken kann, ohne daß die Wirkung dieser Kräfte dadurch

orientiert wird. Man trifft, daß die ganze Richtung eines Kräftesystems allein von den trigonometrischen $ABC, A'B'C'$ abhängt. Man kann daher jedes trigonometrische System in ein einziges ersetzen, für welches diese trigonometrischen Werte annehmen.

§. 22. Von Parallellkräften und dem Schwerpunkt.

Wenn die Kräfte des Systems sämtlich einander parallel sind, so haben die Winkel α, β, γ für alle in den obigen Fällen auftretenden Kräfte P die nämlichen Werte, so man kann setzen $A = \sum P \cos \alpha = \cos \alpha \sum P$ u. s. w. Die Gleichungen 3. geben dann über

$$R \cos p = \cos \alpha \sum P \quad R \cos q = \cos \beta \sum P \quad R \cos r = \cos \gamma \sum P,$$

erwogen folgt $R = \sum P, \quad p = \alpha, \quad q = \beta, \quad r = \gamma.$

Die Resultante eines Systems von Parallellkräften ist also des Summe aller Kräfte gleich und ihren Richtungen parallel.

Da aber ferner die Gleichung 7. in diesem Falle identisch erfüllt wird, so kann man das System durch die Resultante allein ersetzen. Setzt man in 5. also $M = 0$, so erhält man zur Bestimmung des Angriffspunktes der Resultanten folgende Gleichungen:

$$R b \cos \gamma - R c \cos \beta = \cos \gamma \sum P x - \cos \beta \sum P x$$

$$R c \cos \alpha - R a \cos \gamma = \cos \alpha \sum P x - \cos \gamma \sum P x$$

$$R a \cos \beta - R b \cos \alpha = \cos \beta \sum P x - \cos \alpha \sum P y.$$

Die Gleichungen aber werden erfüllt durch die Annahmen

$$R a = \sum P x \quad R b = \sum P y, \quad R c = \sum P z,$$

aus welchem durch Berücksichtigung des Wertes von R sich ergibt

$$a = \frac{\sum P x}{\sum P}, \quad b = \frac{\sum P y}{\sum P}, \quad c = \frac{\sum P z}{\sum P}$$

Dies ist ein Angriffspunkt, dessen Lage, wie man sieht, ganz unabhängig von den Winkeln α, β, γ ist d. h. ganz unabhängig von der Richtung der parallelen Kräfte.

Nach dieser Auffassung also auch diese Kräfte wirken mögen, in Resultante gesetzt immer noch einen bestimmten Punkt, dessen Lage immer von der Größe u. den Angriffspunkten der Kräfte abhängen. Man nennt diesen Punkt den Mittelpunkt der parallelen Kräfte. Zu die Resultante der parallelen Kräfte gehören Eigenschaften welche das eigene Gewicht auf die Punkte eines Massenglieds anwirkt. Dem obigen zufolge kann man also in jeder Lage des Körpers die Wirkung des Pflanzkraft durch eine Resultante ersetzen, welche dem Gewicht des ganzen Körpers gleich ist, und noch einen bestimmten, von der Lage des Körpers unabhängigen Punkt zeigt. Die Linie, in welcher eine solche Resultante wirkt, nennt man die Pflanzlinie des Körpers; die Wirkung der Pflanzkraft kann gemessen werden indem man einen Punkt der augenblicklichen Pflanzlinie festhält. Aber alle Pflanzlinien schneiden sich in einem Punkte, dem Pflanzpunkt, und die Wirkung der Pflanzkraft wird für jede Lage aufgefunden, wenn man diesen Punkt festhält. Bezeichnet man noch G das Gewicht eines materiellen Punktes im Körper, dessen Lokalisation x, y, z ist, so bestimmt man dann die Lokalisation des Pflanzpunktes durch die Gleichungen:

$$J. \dots a = \frac{\sum Gx}{\sum G}, \quad b = \frac{\sum Gy}{\sum G}, \quad c = \frac{\sum Gz}{\sum G}$$

Die Bedeutung dieser Formeln kann man auch in folgenden Weise darstellen. Es ist $\sum Gx$ nichts anderes als die Summe der statischen Momente aller Punkte des Körpers für die Ebene der YZ . für eine ihr parallele Ebene, welche man A von jener entfernt ist, wird jeder Hebelarm um A verlängert, so daß $\sum G(x+A) = \sum Gx + A \sum G$ die Summe der statischen Momente ist. Dies wird aber nach J auch gleich $(\sum G + A) \sum G$, d. h. gleich dem statischen Moment des Pflanzpunktes, wenn man in diesem die Masse des ganzen Körpers concentriert denkt.

Da nun aus der Richtung der Durchschnittslinien ganz deutlich ist, so trife man
sich das Pfeerspunkt der Eigenschaften besitzt, daß für jede Ebene die Punkte der Acti-
schen Momente des ganzen Körpers gleich dem Moment des Pfeerspunktes ist, wenn
man sich in demselben die Masse des ganzen Körpers vereinigt denkt. Und wenn
die Ebene durch den Pfeerspunkt geht, ist offenbar dies letztere Moment gleich
Null. Also entspricht die Punkte der Actischen Momente des Körpers für jede
Ebene den Pfeerspunkt gelegte Ebene.

Es soll nun folgenden Satz ausgesprochen werden für vertheilte Figuren bestimmt
werden, und zwar unter der Voraussetzung, daß die Dichtigkeit des Körpers an
allen Stellen gleich groß ist. (oder auch gleich groß überall, das gleiche Gewicht haben.)
Allen Stellen gleich groß ist, daher dieser Voraussetzung kann man in der Formel 2
statt des Gewichts G die Masse M setzen. Volumenmoment S , dessen Durchschnitt xyz hat, die Größe
dieses Volumens selber setzen, welche dem Gewicht G proportional wird.
Es mag nun bemerkt sein, daß der Pfeerspunkt eines Körpers nicht notwendig
in ihm selbst liegt, sondern auch außerhalb liegen kann, wie der Pfeerspunkt
eines Kreissegments gegeben. So oft, wo der Schwerpunkt des Mittelpunktes be-
fallen ist. Will er also auf einer der unteren Hitzungspunkte bilden, so muß
man sich zunächst mit dem Körper auf eine unzerstückelte Weise durch
geradlinige Linien vorstellen können.

Ein richtiges Hilfsmittel für die Bestimmung des Pfeerspunktes bildet der Satz,
daß man um den Pfeerspunkt eines Körpers zu finden sich in den Pfeerspunkten
seiner Theile die Masse derselben angesetzt denken kann; u. also zunächst
die Pfeerspunkte seiner Theile bezeichnen kann, so kann aber den Körper als ein
System von einzelnen Massenpunkten betrachten darf.

Mit wachsend $a, b, c, \dots a_2, b_2, c_2$ etc. die Coordinaten des Schwerpunktes anzu-
nehmen, A, A_2 etc. die Gewichte dieser Theile, so führt nach dem Vorigen die
statistische Momente dieser Theile in bezug auf die drei Coordinatenachsen:

$$A, a, \quad A_2 a_2 \dots$$

$$A, b, \quad A_2 b_2 \dots$$

$$A, c, \quad A_2 c_2 \dots$$

Der Schwerpunkt des ganzen Körpers hat daher die Coordinaten:

$$g \dots a = \frac{A_1 a_1 + A_2 a_2 \dots}{A_1 + A_2 \dots} \quad b = \frac{A_1 b_1 + A_2 b_2 \dots}{A_1 + A_2 \dots} \quad c = \frac{A_1 c_1 + A_2 c_2 \dots}{A_1 + A_2 \dots}$$

was der zu beweisende Satz ist.

B. 23. Schwerpunktsbestimmungen für Linien.

Um den Schwerpunkt eines gegebenen Drahtes zu bestimmen, dessen Querschnitt über-
all der gleiche, u. ferner klein gegen die Länge des Drahtes ist, kann man den-
selben als eine dünne Linie ansehen, u. die statische Momente für kleine Ab-
schnitte derselben bestimmen. Der Querschnitt eines solchen Abschnittes wird dann für
die Länge proportional u. man kann in den Formeln 8 für die l die kleinen
Längen der Drahtelemente einführen, deren Coordinaten die x, y, z sind.

Denken wir uns den Draht zunächst getrennt in Gestalt eines Folgebogens, dessen
Bogen nicht in einer Ebene zu liegen brauchen.

Dann können wir die Masse jedes Folgebogens, welche ihrer Länge propor-
tional ist, in ihrem Schwerpunkt d. h. in der Mitte concentrirt denken, oder auch
dasselbe ist die Hälfte der Masse in jedem Endpunkt des Bogens. Sind also nur die
Coordinaten des Endpunktes

$$x_1, y_1, z_1$$

$$x_2, y_2, z_2$$

$$x_3, y_3, z_3 \dots$$

mit bezeichnen wir durch T_{12} die Seite, welche sie verbinden, durch T_{23} , welche

die zweite und dritte Seite vertheilt, etc. so kann man in diesen Punkten folgende Messen angebraucht denken:

$$\text{in } x_1, y_1, z_1, \quad \frac{r_{12} + r_{13}}{2}$$

$$\text{in } x_2, y_2, z_2, \quad \frac{r_{12} + r_{23}}{2}$$

etc.

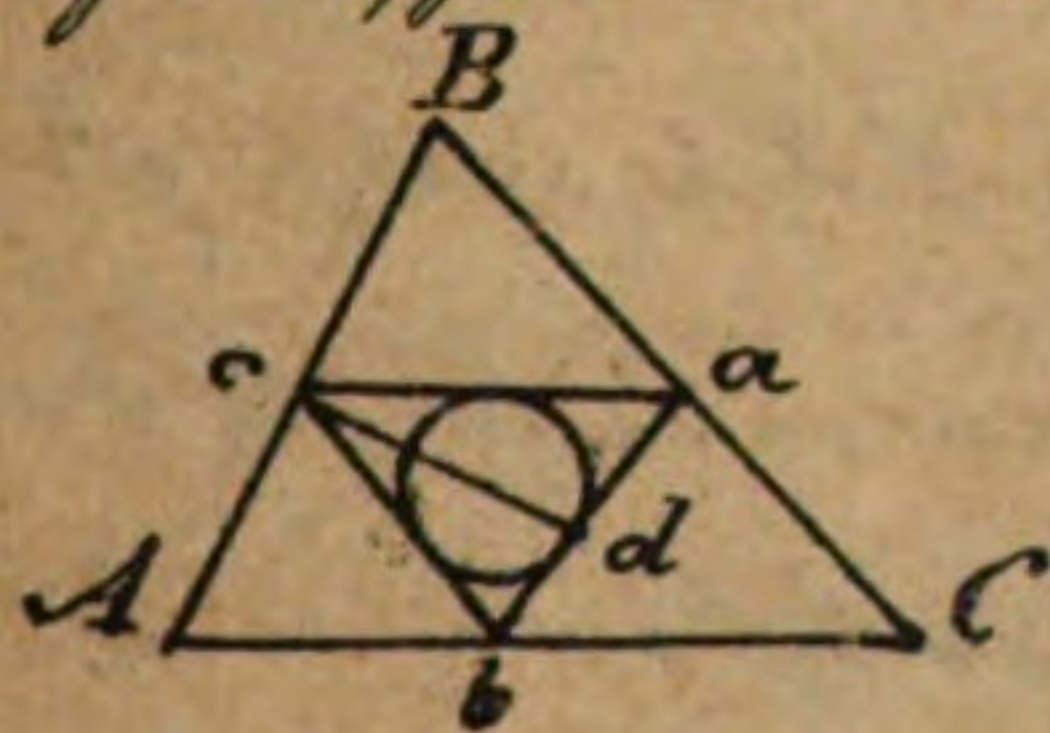
und indem man dann den Pythagoräus Punkt dieses Messensystems bestimmt, erhält man die Coordinaten:

$$a = \frac{x_1 \frac{r_{12} + r_{13}}{2} + x_2 \frac{r_{12} + r_{23}}{2} + \dots}{r_{12} + r_{23} + r_{31} + \dots}$$

$$b = \frac{y_1 \frac{r_{12} + r_{13}}{2} + y_2 \frac{r_{12} + r_{23}}{2} + \dots}{r_{12} + r_{23} + r_{31} + \dots}$$

$$c = \frac{z_1 \frac{r_{12} + r_{13}}{2} + z_2 \frac{r_{12} + r_{23}}{2} + \dots}{r_{12} + r_{23} + r_{31} + \dots}$$

Für die unregelmäßigen Figuren kann man diese Formeln durch geometrische Constructionen ersetzen. Ist das Dreieck im Dreieck, so kann man die Messen jedes Ecks in der Mitte desselben concentrirt denken. Statt also den Pythagoräus Punkt von ABC zu suchen, setze man nur den Pythagoräus Punkt des ähnlichen Dreiecks abc zu suchen,



unter der Voraussetzung, daß die Ecken desselben proportional den Seiten des größeren, oder auf den gegenüberliegenden Ecken des kleineren Dreiecks beifallen sind. Bestimmt man

also die Messen von a und b in dem Pythagoräus Punkt d von abc und sich verhalten

$$\frac{b \cdot d}{d \cdot a} = \frac{c \cdot b}{c \cdot a} \text{ d. h. die Pythagoräuslinie } c \cdot d \text{ muß nach einem bekannten geometrischen Satz,}$$

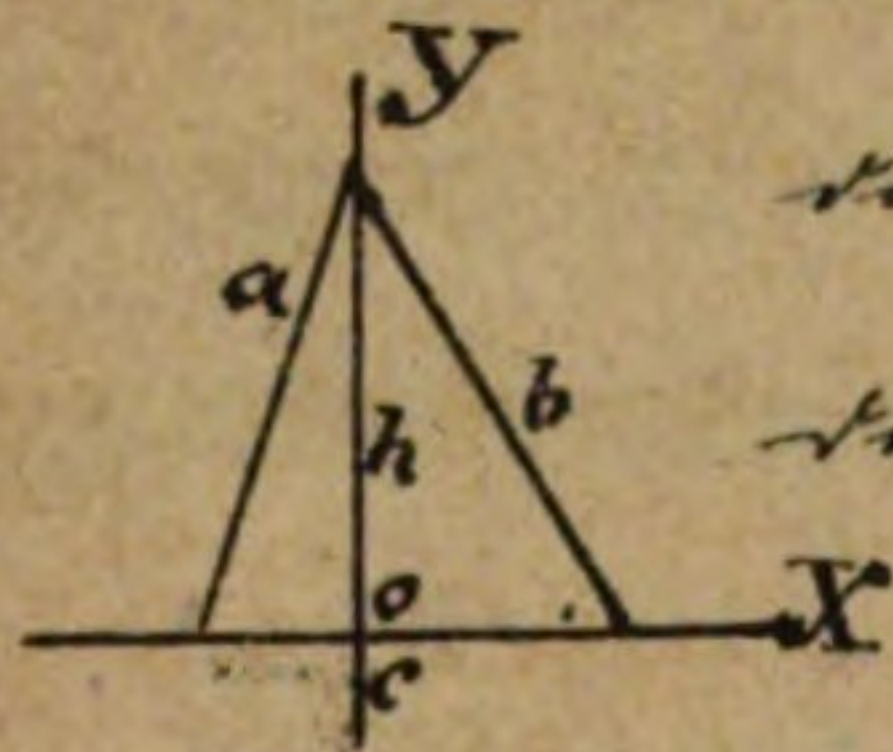
den Winkel abc halbiren. Auch da die entgegengesetzten Seiten diesen Pythagoräuslinien

ebenfalls die Winkel bei a und b halbiren, so findet sich, daß der gesuchte Pythagoräus Punkt, in

welchem diese Linie sich befindet, kein anderer ist, als der Mittelpunkt des

Kreises, welcher die Seiten des kleineren Dreiecks berührt. Den Abstand dieses

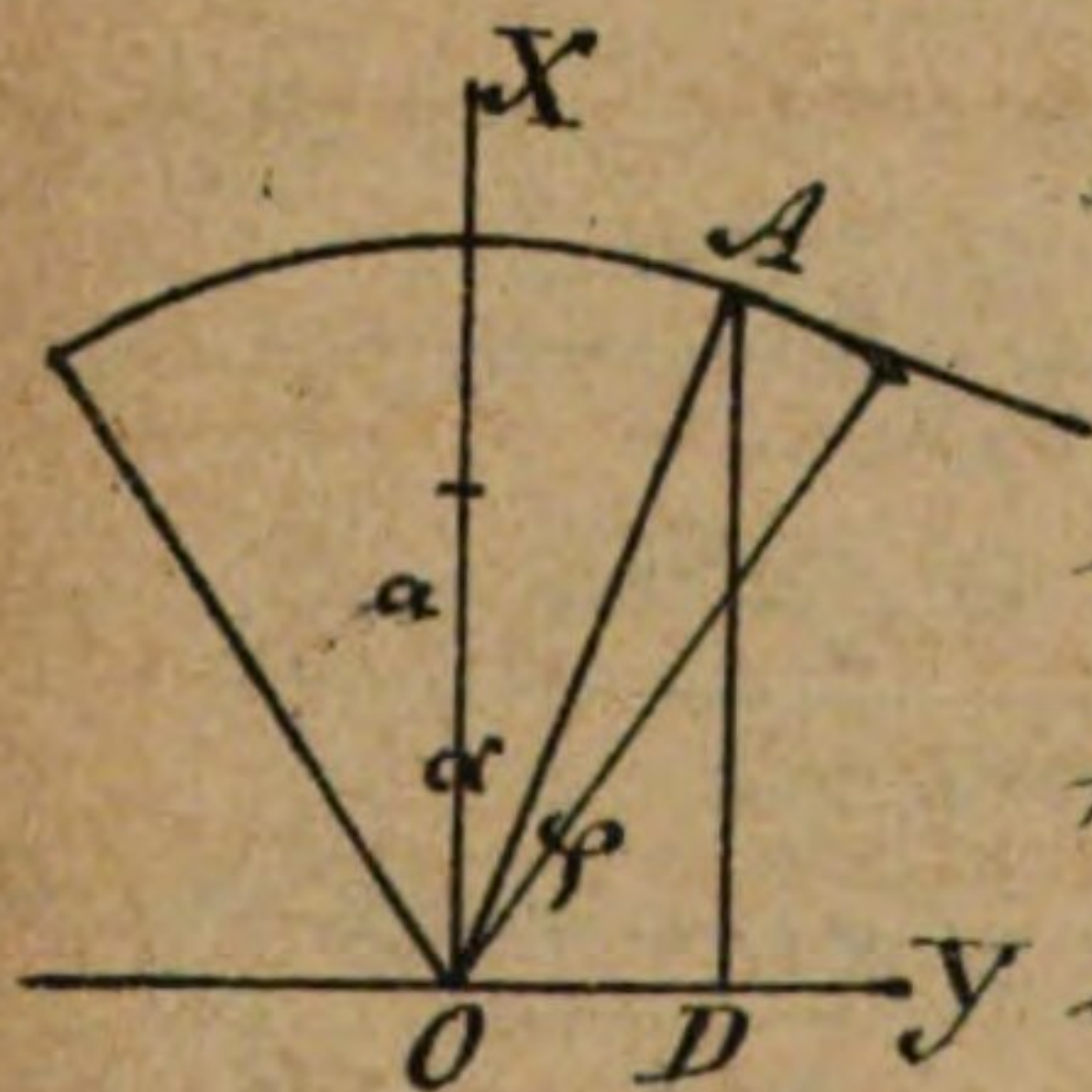
Punktes von einer Seite des Dreiecks findet man leicht aus den Formeln etc.



Wenn man das Coordinatensystem wie in der Figur, so sind die y Coordinaten der Ecken des Dreiecks $c, h, 0$, so daß die zweite der Gleichungen 4 das Resultat gibt:

$$\bar{y} = \frac{h(a+b)}{2(a+b+c)}.$$

Um den Schwerpunkt eines Dreiecks zu bestimmen, der in Form eines Kreisbogens gegeben ist, kann man verfahren wie folgt. Der Radius des Kreises, welchem



Kreisbogen angefaßt, sei r , α der dem gegebenen Bogen entsprechende Bogen für den Radius r . Offenbar liegt der Schwerpunkt auf der Halbierungslinie des Winkels α . Ferner aber ist das statische Moment eines in A befindlichen Elementments E in Bezug auf die Axe OY ausgedrückt $E \cdot AD = E r \sin \varphi$.

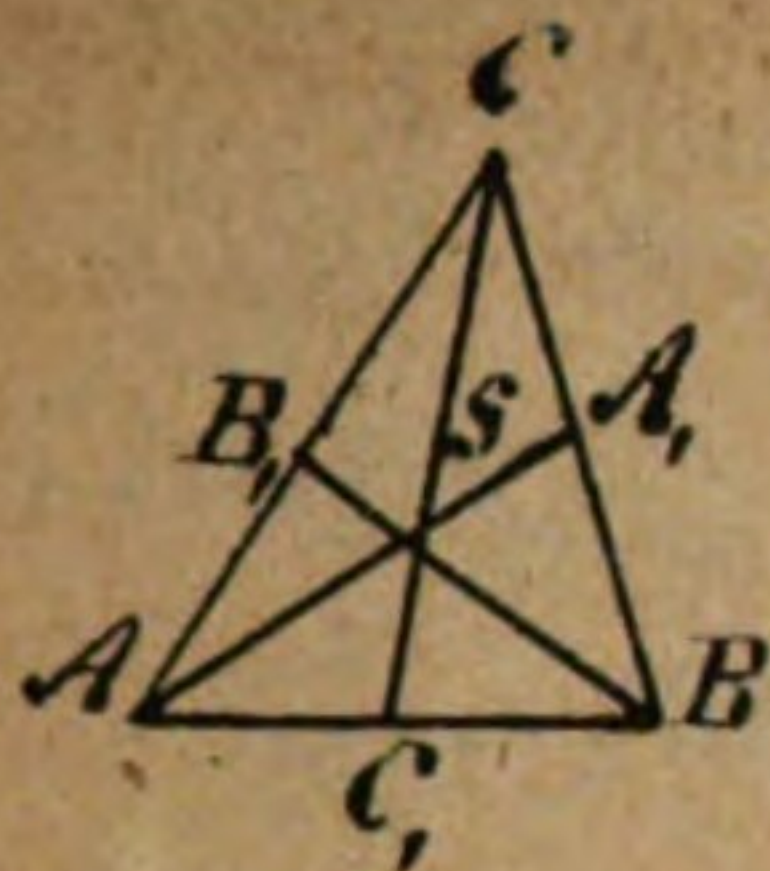
Da nun das Elementment auf den Winkel φ mit der Linie AD bildet, so ist $E \sin \varphi$ nicht anders als die Projection des Elements auf die Y Axe; und φ mit der Mitte des statischen Moments des ganzen Bogens $r \sin \varphi$ gleicht r multipliziert mit der Projection des ganzen Bogens auf die Y Axe, welche gleich $2 r \sin \frac{\alpha}{2}$ ist; oder diese Mitte ist $= 2 r^2 \sin \frac{\alpha}{2}$. Nehmen wir ferner, daß die Länge des Bogens gleich $r \cdot \alpha$, so erhalten wir aus $\bar{y}$:

$$\bar{y} = r \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}},$$

was die Bestimmung des Schwerpunkts von dem Kreismittelpunkte ausdrückt.

§. 24. Schwerpunktsbestimmungen für Flächen.

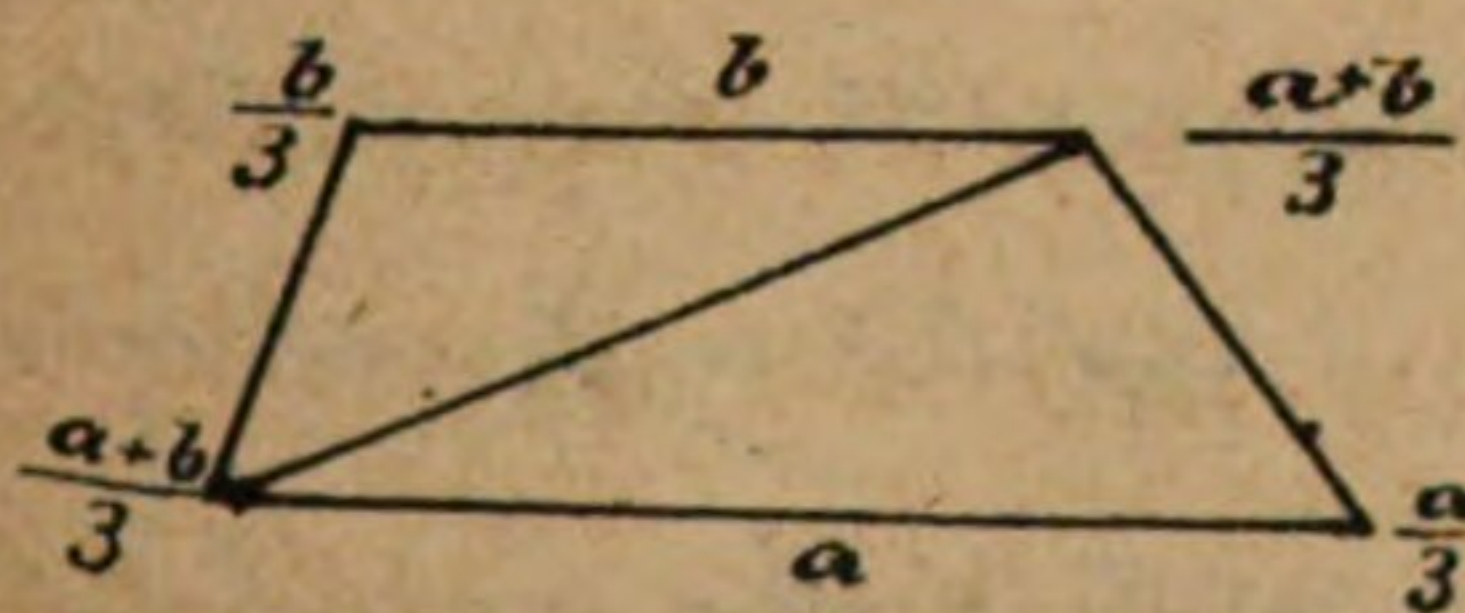
Der Schwerpunkt eines Dreiecks wird gefunden, indem man das Dreieck in drei parallel in einem Kreise gelegte, die Schwerpunkte aller dieser Kreise liegen auf der Linie, welche die Spitze des Dreiecks mit der Mitte der Gegenseite verbindet. Diese Linie also ist eine Symmetrielinie des Dreiecks,



und bestimmt sich mit den beiden entgegengesetzten Linien in Figur 2
punkt der Fläche. Man erhält aber dieselben Symploimen, wenn
man die Masse des Dreiecks sich zu gleichen Theilen in den Ecken
concentrirt denkt. Man kann man die Massen von AB zum Top,
guten Masse in C. vereinigen, und erhält die Symploime CC. Da aber auch
hier die Masse in C, doppelt so viel Masse bestimmt als in C, so muß S von
C doppelt so weit entfernt sein als von C, was ein bekannter geometrischer
Satz ist.

Man kann also die Masse eines Dreiecks sich bei Symploimpunkt C zu
Linien in zwei zu gleichen Theilen in den Ecken concentrirt denken.

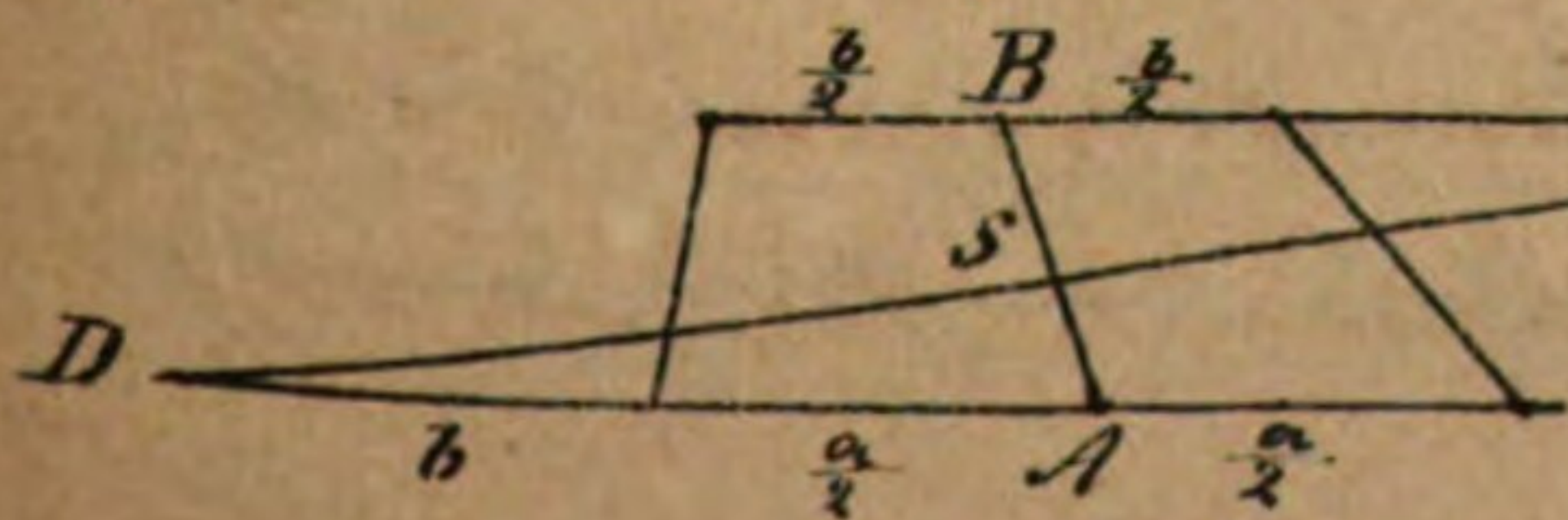
Wenden wir dies auf ein Trapez an, dessen parallele Seiten a und b sind,
so findet sich, daß die Dreiecke, in welche eine Diagonale die Figur theilt,



sich wie a zu b verhalten. Bringt man also
proportionale Massen in den Ecken des Dreiecks an,

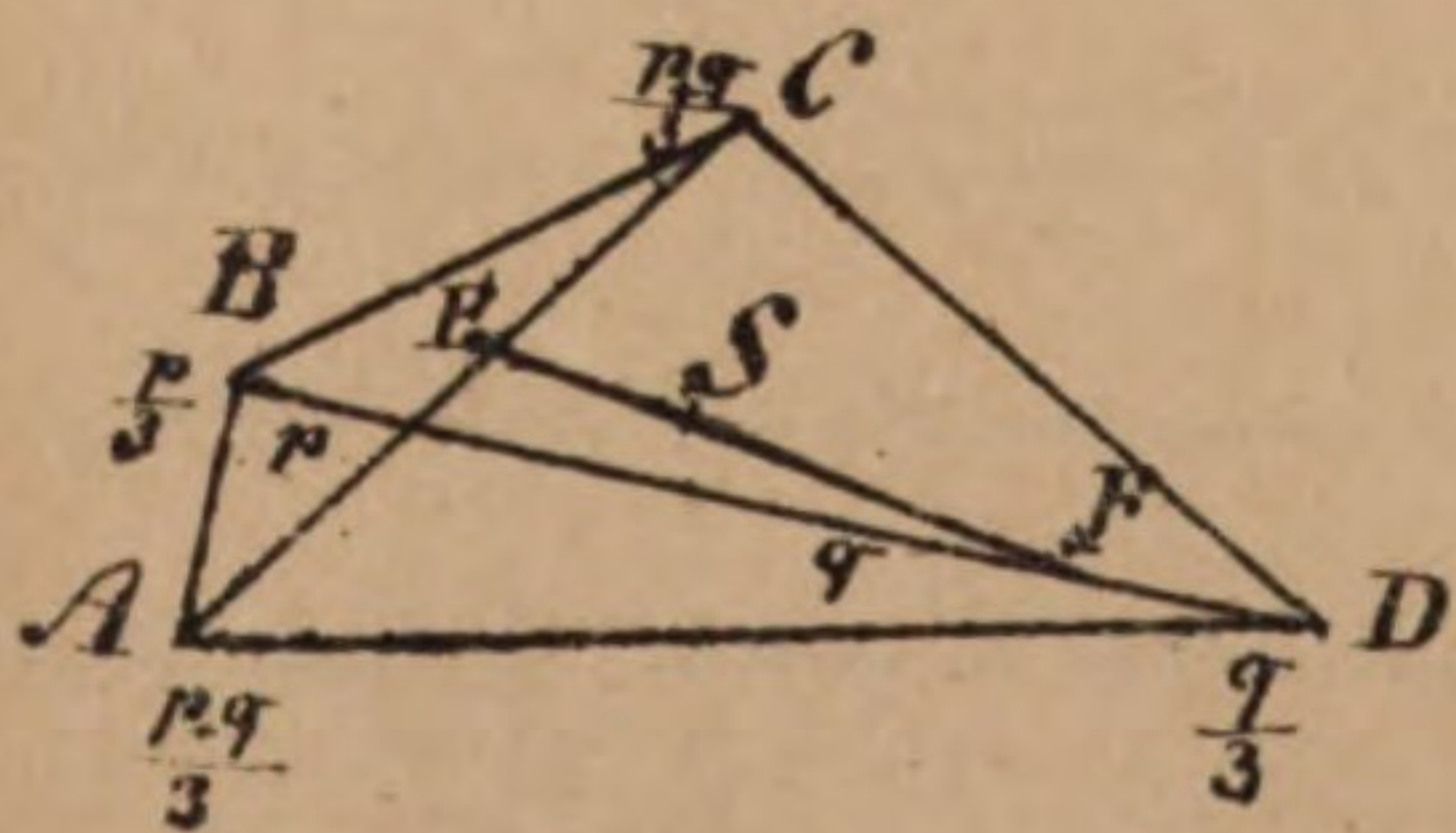
so erhält sich der obere Theil der Masse
 $\frac{a+b}{3}$, auf der unteren $\frac{b+2a}{3}$. Die Abstände des Symploimpunkts von den beiden
Parallelen müssen sich also umgekehrt verhalten, d. h. wie $2a + b$ zu $a + 2b$,
oder wenn h die Höhe des Trapezes ist, muß der Abstand des Symploimpunkts
von der oberen Parallelen $\frac{h(2a+b)}{3(a+b)}$
von der unteren Parallelen $\frac{h(a+2b)}{3(a+b)}$

Um den Punkt zu construiren, bemerke man, daß wenn das Trapez in
parallele Massen getheilt wird, die Symploimpunkte aller auf der Linie liegen,



Inde Linie ist also eine Symploime

bedeutet man nun die parallelen Seiten bezuglich um a und b zu
 schieben DC , so ist S der Schwerpunkt. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke SBC ,
 SAD folgt, daß S die Linie AB im Verhältniß von $\frac{b}{2} + a$ zu $\frac{a}{2} + b$, oder
 von $b + 3a$ zu $a + 2b$ theilt. In einfachen Verhältniß theilt also auch S
 die durch S gezogene Höhe, was oben als Eigenschaft des Schwerpunkts
 aufgeführt war. Um den Schwerpunkt eines beliebigen Vierecks zu finden,
 theilt man das Viereck durch eine Diagonale in zwei Dreiecke.

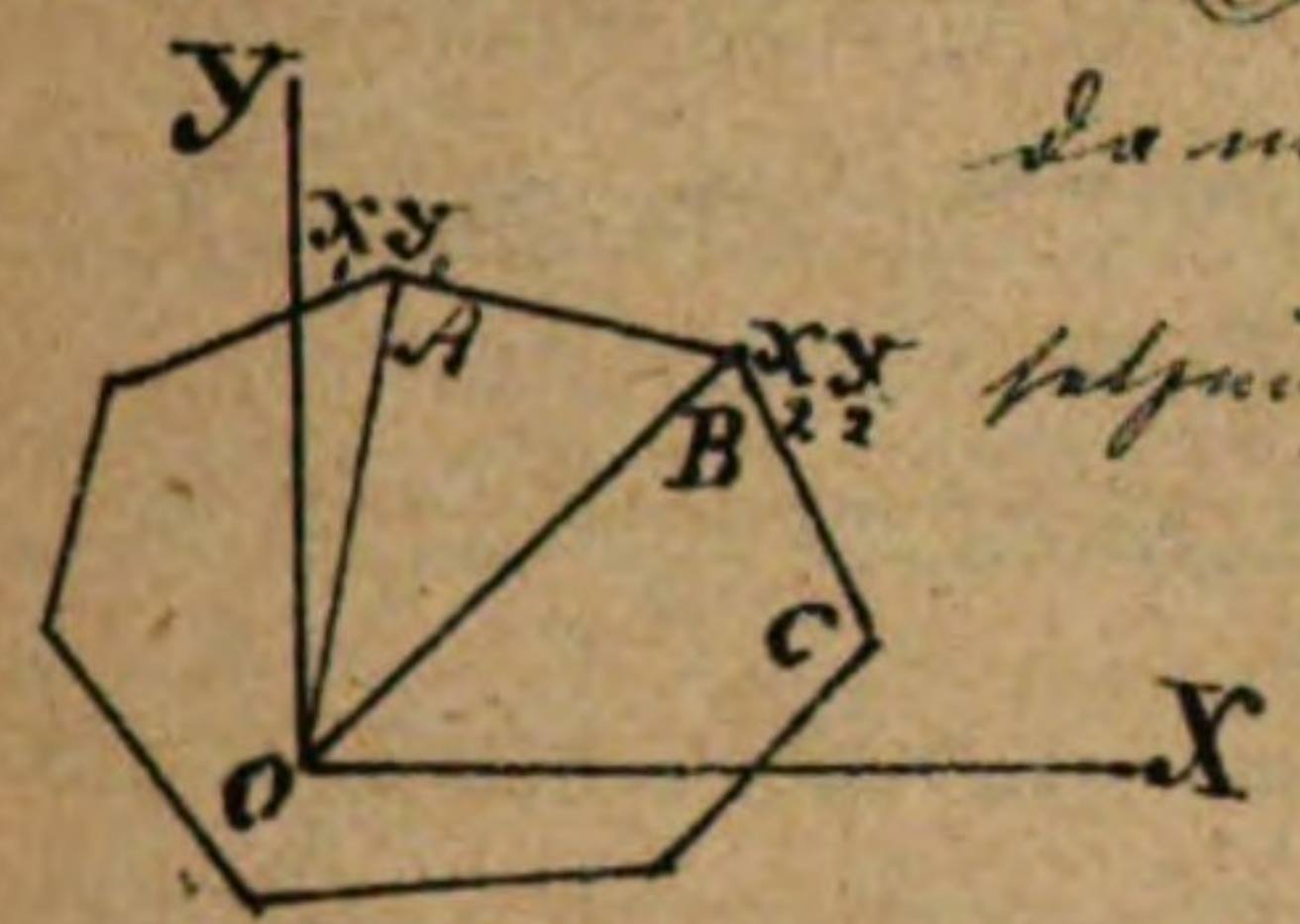


Die Dreiecke ABC und ACD verfallen hier, wie
 die über der Seite AC stehenden Höhen, oder wie
 die Abschnitte pq der ersten Diagonale. Man
 theilt also in den Ecken das einem Dreieck

eine Masse $\frac{P}{3}$, in einem das andere $\frac{Q}{3}$ concentrirt denken; so daß man die
 in der Figur angegebenen Theilung erhält. Der Schwerpunkt der Ecken
 B u. D wird daher erhalten, wenn man p von D aus auf BD anträgt, weil
 hier dann die Massen BF und FD umgekehrt wie die Abstände von B und
 fallen. Der Schwerpunkt von AC aber liegt in der Mitte E . Es erhält
 man die Schwerlinie EF . (Man kann nun das Viereck mit beiden Diago-
 nalen in vier Theile und erhält dann eine zweite Schwerlinie, welche EF
 im Schwerpunkt theilt. Man kann aber auch bemerken, daß in E die Masse
 von $AC = \frac{2P + Q}{3}$, in F die Masse von $BD = \frac{P + 2Q}{3}$ versammelt zu denken
 ist. Der Schwerpunkt S liegt also auf EF doppelt so weit von F entfernt
 als von E , wo nämlich die doppelte Masse concentrirt ist.

Um den Schwerpunkt eines Polygons zu beschreiben, theilt man dasselbe
 in drei Theile, so daß man es in drei Theile zerlegen kann, so daß man es in drei Theile zerlegen kann, so daß man es in drei Theile zerlegen kann.

gelegen, denn eine Seite im Anfangspunkt der Coordinaten liegt.



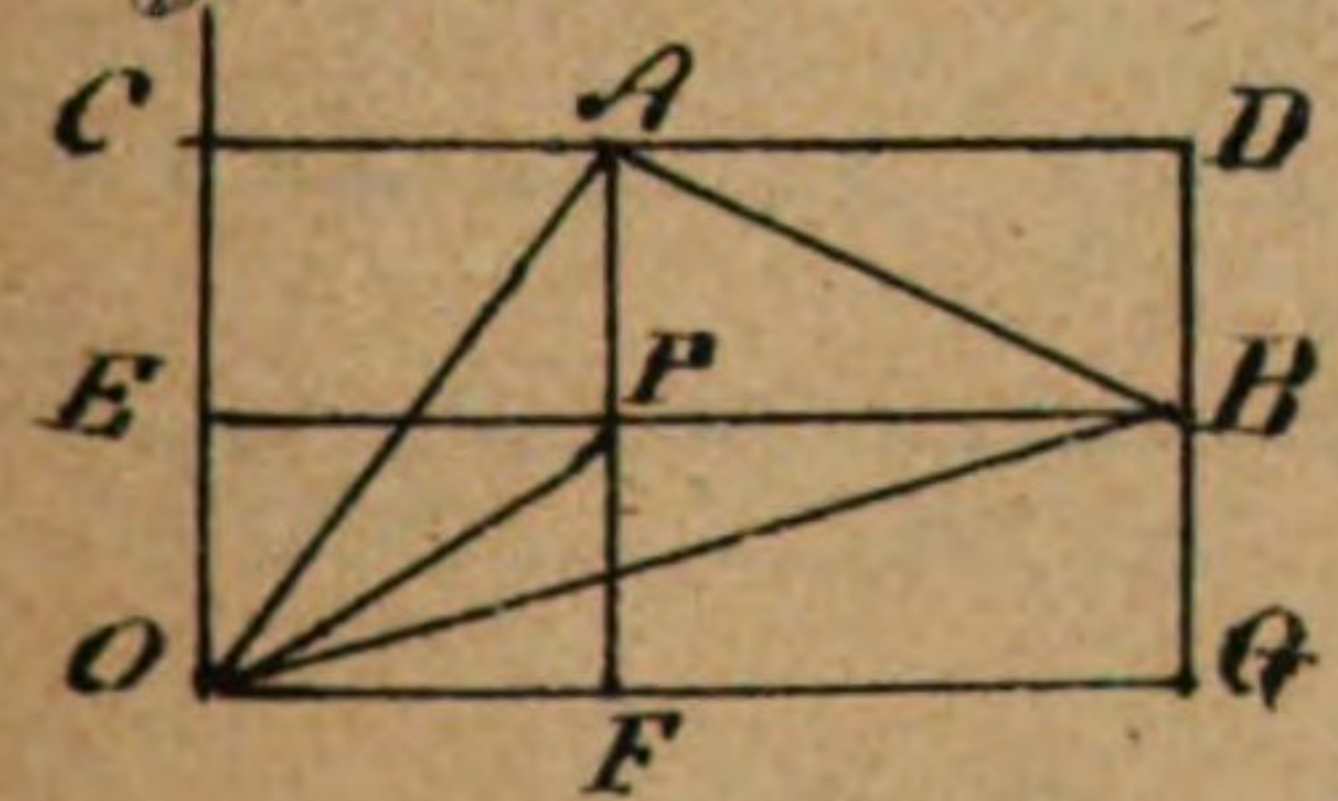
Da man den Flächengröße eines Vierecks finden kann, so ist in der ebenen Geometrie offenbar nicht, so finden sich für den Flächengröße von OAB die Formeln

$$a_{12} = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad b_{12} = \frac{y_1 + y_2}{2} \text{ (Fläche im ersten Quadranten)}$$

$$a_{23} = \frac{x_2 + x_3}{2}, \quad b_{23} = \frac{y_2 + y_3}{2}$$

etc.

Um nun den Flächengröße des ganzen Polygons zu finden, kann man sich in diesen Flächengrößen die Maße der aufeinanderfolgenden Vierecke concentrirt denken. Man findet also die Fläche des Vierecks OAB , welche für die Hälfte der Fläche des Vierecks $OACB$ ist, durch folgende Betrachtung. Ziehen wir durch die Seiten AB Parallelen zu den Seiten, so ist



- 2 $\Delta APB = \text{Rechteck } ADBP$
- 2 $\Delta APO = \text{Rechteck } ACEP$
- 2 $\Delta BPO = \text{Rechteck } PBQF$

Das Doppelte des gefundenen Vierecks ist also gleich der Summe der drei Rechtecke, oder gleich der Differenz der Rechtecke $OCDA$ und $OEPE$. Diese aber lassen sich durch die Coordinaten x, y, x_2, y_2 ausdrücken, und sind gleich $y_1 x_2$ und $x_1 y_2$. Das gesuchte Viereck ist also

$$\Delta_{12} = \frac{x_2 y_1 - y_2 x_1}{2} \text{ (Fläche)}$$

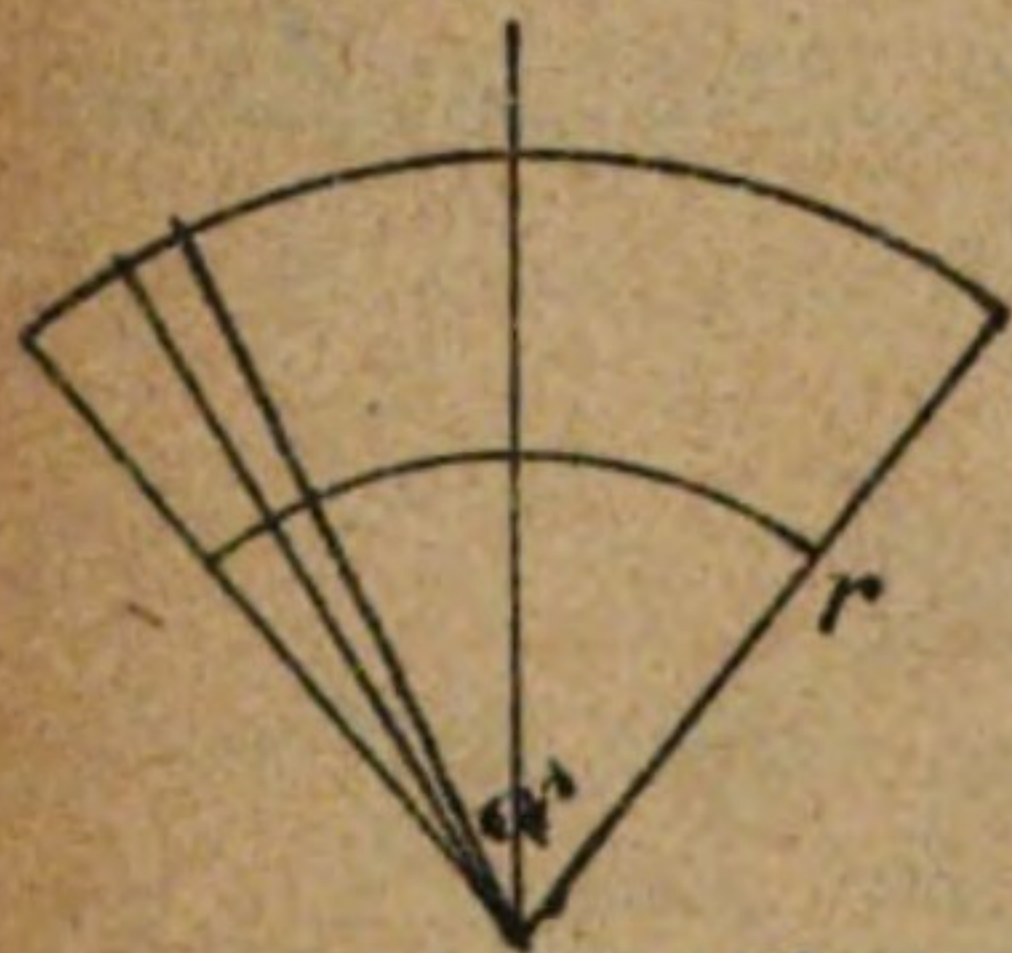
$$\Delta_{23} = \frac{x_3 y_2 - y_3 x_2}{2}, \text{ etc.}$$

Nachdem man auf diese Weise die Formeln 3 ermittelt, so resultirt man die folgenden Formeln für den Flächengröße des Polygons:

$$a = \frac{a_{12} \Delta_{12} + a_{23} \Delta_{23} + \dots}{\Delta_{12} + \Delta_{23} + \dots} = \frac{1}{3} \frac{(x_1 + x_2)(x_2 y_1 - y_2 x_1) + (x_2 + x_3)(x_3 y_2 - y_3 x_2) + \dots}{(x_2 y_1 - y_2 x_1) + (x_3 y_2 - y_3 x_2) + \dots}$$

$$b = \frac{b_{12} \Delta_{12} + b_{23} \Delta_{23} + \dots}{\Delta_{12} + \Delta_{23} + \dots} = \frac{1}{3} \frac{(y_1 + y_2)(x_2 y_1 - y_2 x_1) + (y_2 + y_3)(x_3 y_2 - y_3 x_2) + \dots}{(x_2 y_1 - y_2 x_1) + (x_3 y_2 - y_3 x_2) + \dots}$$

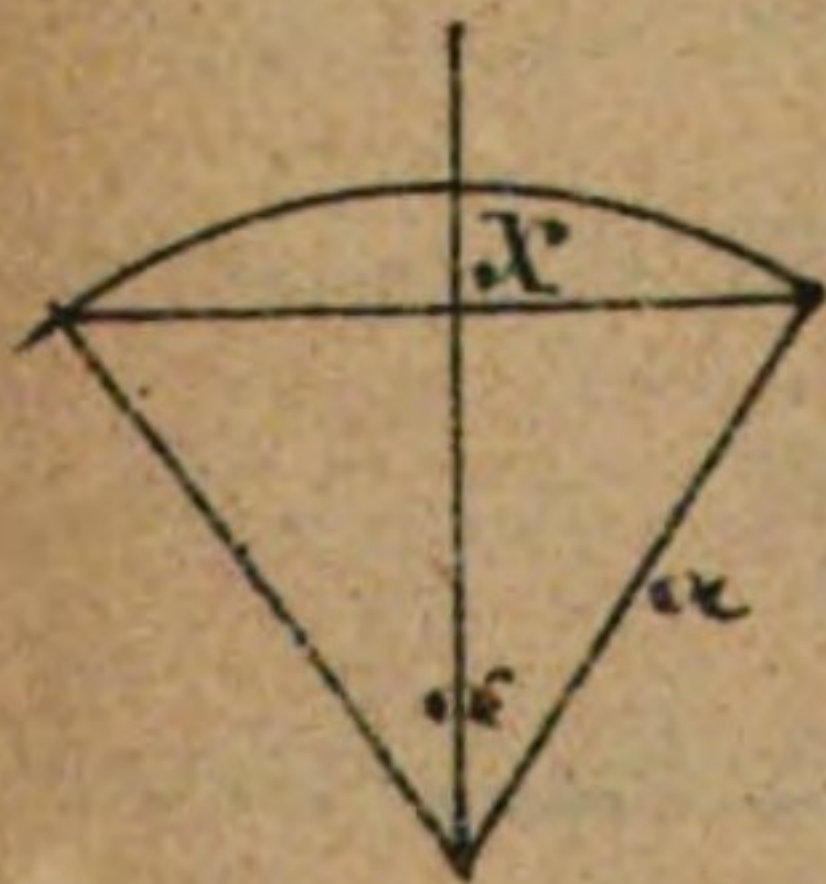
Die Bestimmung des Flächenzentrums für einen Kreisbogen lässt sich auf den Flächenzentrum eines Kreissegments zurückführen. Zerlegt man den Kreisbogen in



näher in kleine Stücke, so fallen diese fast zum Flächenzentrum hinüber auf einen Kreisbogen, dessen Radius gewissermaßen der Radius des Kreisbogens ist. Setzt man sich also alle Massen auf diesen Kreisbogen übertragen, so findet man den Flächenzentrum derselben auf der Halbierungslinie des Winkels α ,

mit nach S. 23. in der Entfernung $\frac{2r}{3} \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}}$ vom Mittelpunkt.

Für den Halbkreis: $\frac{4r}{3\pi}$. — Man findet ferner leicht den Flächenzentrum eines Kreisbogens. Sei x der Abstand seines Flächenzentrums vom Mittelpunkt.



Die Fläche des Kreisbogens ist $a^2 \frac{\alpha}{2}$, die des abgetrennten Kreissegments $\frac{a^2}{2} \sin \alpha$. Also ist das statische

Moment des Abchnitts:

$$\frac{x a^2}{2} (\alpha - \sin \alpha).$$

Aber das des Kreisbogens ist $\frac{2}{3} a^3 \sin \frac{\alpha}{2}$; u. das des Kreissegments,

dessen Flächenzentrum um $\frac{2}{3}$ der Höhe $= \frac{2}{3} a \cos \frac{\alpha}{2}$ vom Mittelpunkt entfernt ist, ist $\frac{2}{3} a^3 \cos \frac{\alpha}{2} \sin \alpha$. Also wird

$$\frac{x a^2}{2} (\alpha - \sin \alpha) = \frac{2}{3} a^3 \sin \frac{\alpha}{2} - \frac{2}{3} a^3 \cos \frac{\alpha}{2} \sin \alpha.$$

Setzt man nun in letztem Gliede $2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$ für $\sin \alpha$, so findet sich das Resultat

$$x = \frac{4}{3} a \frac{\sin^3 \frac{\alpha}{2}}{\alpha - \sin \alpha}.$$

Man kann diese Resultate zugleich auf eine flächige Übertragung mit Hilfe des folgenden allgemeinen Satzes:

Wenn man eine obere Fläche auf eine andere ebene Fläche projiziert,
so ist die Projektion des Flächenelements der oberen Fläche zugleich der Flächenelement der unteren. Die Elemente beider Figuren liegen auf in der Linie
 Ebene, welche in der Zeichnung durch den Punkt O repräsentiert ist.

Diese sei zugleich die X-Achse in beiden Figuren; in der
 oberen Figure sei bezeichnet das gegen die Achse OX, in der unteren
 die Achse OX', welche gegen einander den Projektions-
 winkel α bilden. Entsprechende Punkte beider Figuren haben den gleich X-
 koordinaten, u. geissien der Coordinaten Y der oberen und Y' der unteren Punkte
 besteht die Beziehung

$$Y' = Y \cos \alpha.$$

Ist aber E ein Flächenelement der oberen Figure, E' ein der unteren, so ist auf
 $E' = E \cos \alpha.$

Der Flächenelement der unteren Figure hat man offenbar die Coordinaten:

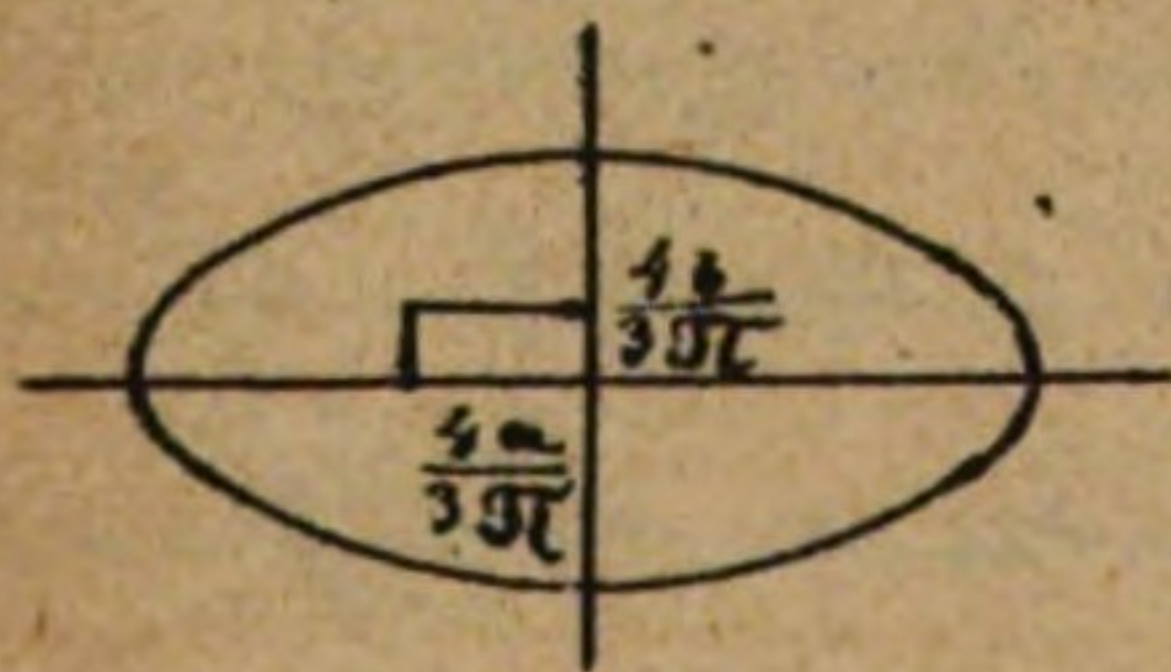
$$a' = \frac{\sum E' X'}{\sum E'} = \frac{\sum E X \cos \alpha}{\sum E \cos \alpha} = \frac{\sum E X}{\sum E} = a$$

$$b' = \frac{\sum E' Y'}{\sum E'} = \frac{\sum E Y \cos^2 \alpha}{\sum E \cos \alpha} = \cos \alpha \cdot \frac{\sum E Y}{\sum E} = b \cos \alpha.$$

Es findet sich also für den Flächenelement der unteren Figure dieselbe Coordinaten
 a wie in der oberen; die Coordinaten b der oberen Figure wird aber noch mit $\cos \alpha$
 multipliziert, um die Coordinaten der unteren zu erhalten, d.h. der eine
 Flächenelement ist die Projektion des anderen.

Projiziert man z.B. einen Kreis mit dem Radius a unter dem Winkel α ,
 so entsteht eine Ellipse, deren großer Achse a gebildet ist, während die kleinere

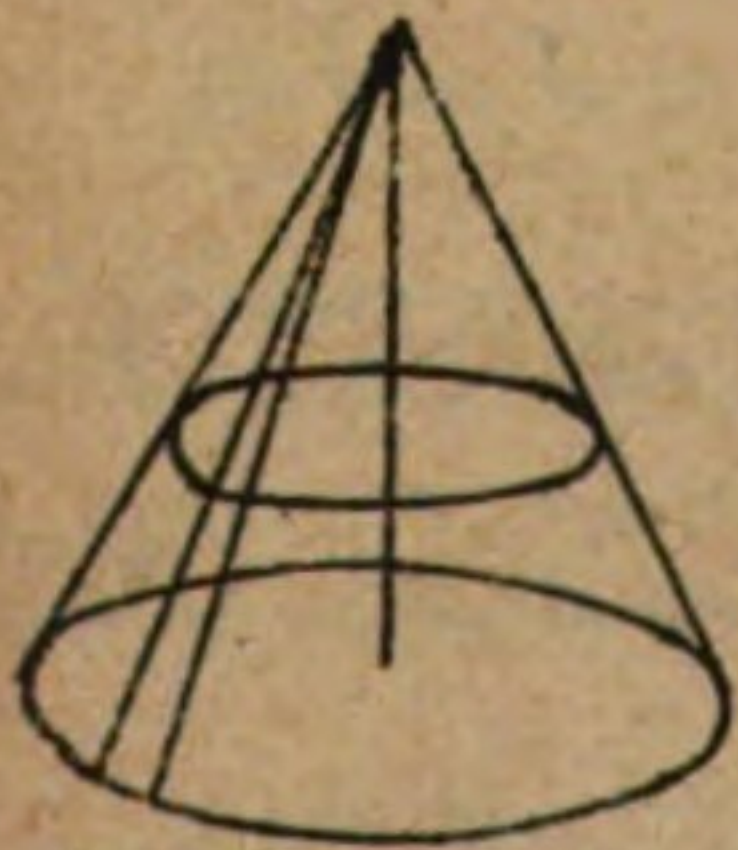
b. gleich $a \cos \alpha$ ist, so ist also $\cos \alpha = \frac{b}{a}$. Der Pythagoräuspunkt des Ellipsen-
 feldes, welcher durch die kleinen a oder b abgegriffen wird, ist sich selbst ungentügel-
 gebildet, hat also gleich dem Pythagoräuspunkt des Halbkreises von Abstand $\frac{4}{3} \frac{a}{\pi}$
 nach unten. Der Pythagoräuspunkt für die Ellipsenfelder aber, welche durch die
 große a abgegriffen wird, ist in gegen der Projektion mit $\cos \alpha$ zu multipli-
 ciren, wird also gleich $\frac{4}{3} \frac{b}{\pi}$. Setzt man sich jede dieser Halften in zwei zwei



Einheiten zerlegt, u. dann Pythagoräuspunkt be-
 stimmt, so sieht man leicht, daß die Pythagoräuspunkte der
 Halften auf den Linien liegen müssen, welche die
 Pythagoräuspunkte der Quadrate verbinden; und der Pythagoräuspunkt des Qua-
 drates hat also die Koordinaten $\frac{4}{3} \frac{a}{\pi}$ und $\frac{4}{3} \frac{b}{\pi}$. —

Der Mantel eines durch parallele Flächen sich abgriffenen Eglindes
 hat offenbar das Pythagoräus gegen dem Pythagoräuspunkt im Mittelpunkte
 der a oder b .

Der Mantel eines geraden Kegels, dessen Basis elliptisch sein kann, läßt
 sich in kleine Stücke zerlegen, die dem Pythagoräuspunkt sämmtlich an ein-
 ander fügen, welche die Größe des Kegels im Vergleich

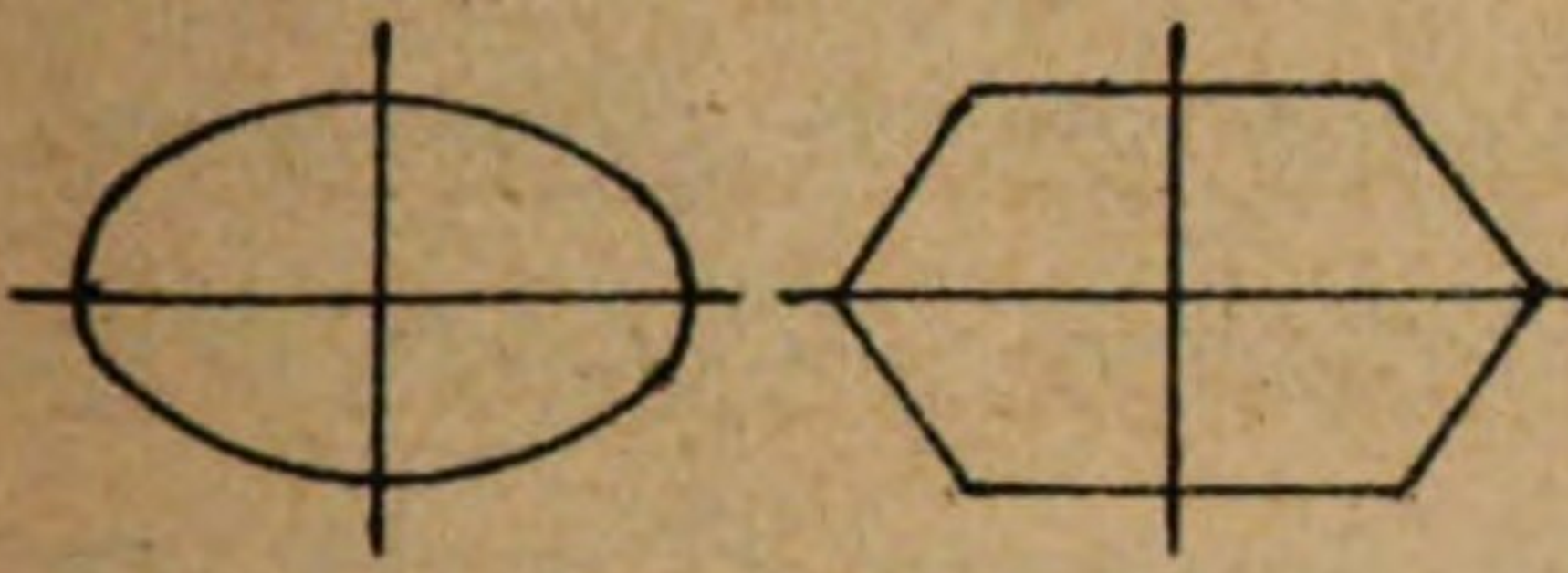


von 1 zu 2 stellt. Man kann also den Kegelmantel einer
 der Basis infolge einer Substitution welche in jedem
 infinitesimalen die Fläche des entsprechenden Elements

verändert vor sich. Diese Fläche ist daher keine ganz gleichmäßig beladene;
 das heißt der Pythagoräuspunkt des Pythagoräus gegen in der a , und ist daher der Pytha-
 goräuspunkt des Kegelmantels.

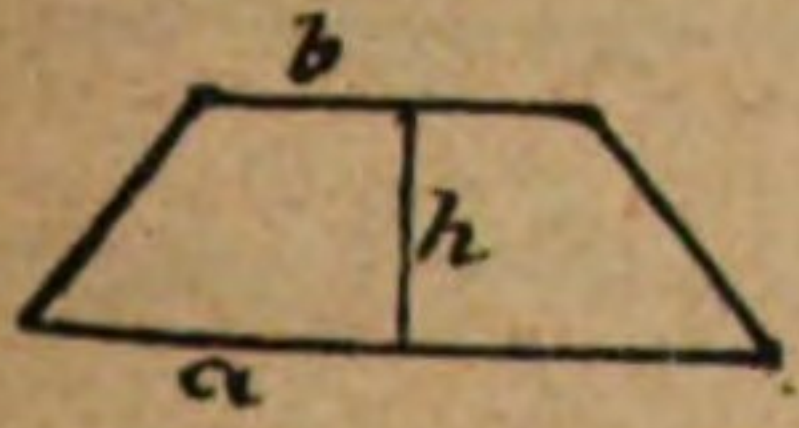
Dieser letztere gilt auch offenbar immer, wenn die Basis des
 Kegels (oder des geraden) eine gegen zwei veränderliche Linien

symmetrische Figur ist, und die Spitze senkrecht über dem Durchschnitt
beider Linien liegt.



Wenn ein solches Kegelstück geschnitten zwey mal
der Basis parallele fläche abgetrennt ist, so geben
uns die Resultate der vorigen Betrachtung in

Trapeze über, deren parallele Seiten sich zerfallen in ähnlische Linien in
den beiden ähnlischen Figuren der oberen und unteren Grundfläche. Zerfallen
sich also die entgegengesetzten Linien in diesen Plätzen wie a zu b, so
zerfallen sich auch die parallelen Seiten des Trapezes, u. die Abstände
der Pyramidenpunkte sind solchen Trapezen von den parallelen Seiten zer-
fallen sich (vergl. oben), wie 2b + a zu 2a + b. Alle Pyramidenpunkte der
Gesamtkonstruktion liegen also in einer Ebene. Der Abstand von der oberen
und unteren Grundfläche zerfällt sich, u. im Resultat diesen
Ebene mit der Basis abgetrennten Kegels liegt der Pyramidenpunkt der
Mantelfläche. Sind z. B. die Endflächen des Kegel mit den Ratien a und b, so
ist der gegenseitige Abstand, so ist der Pyramidenpunkt des Mantels entfernt von



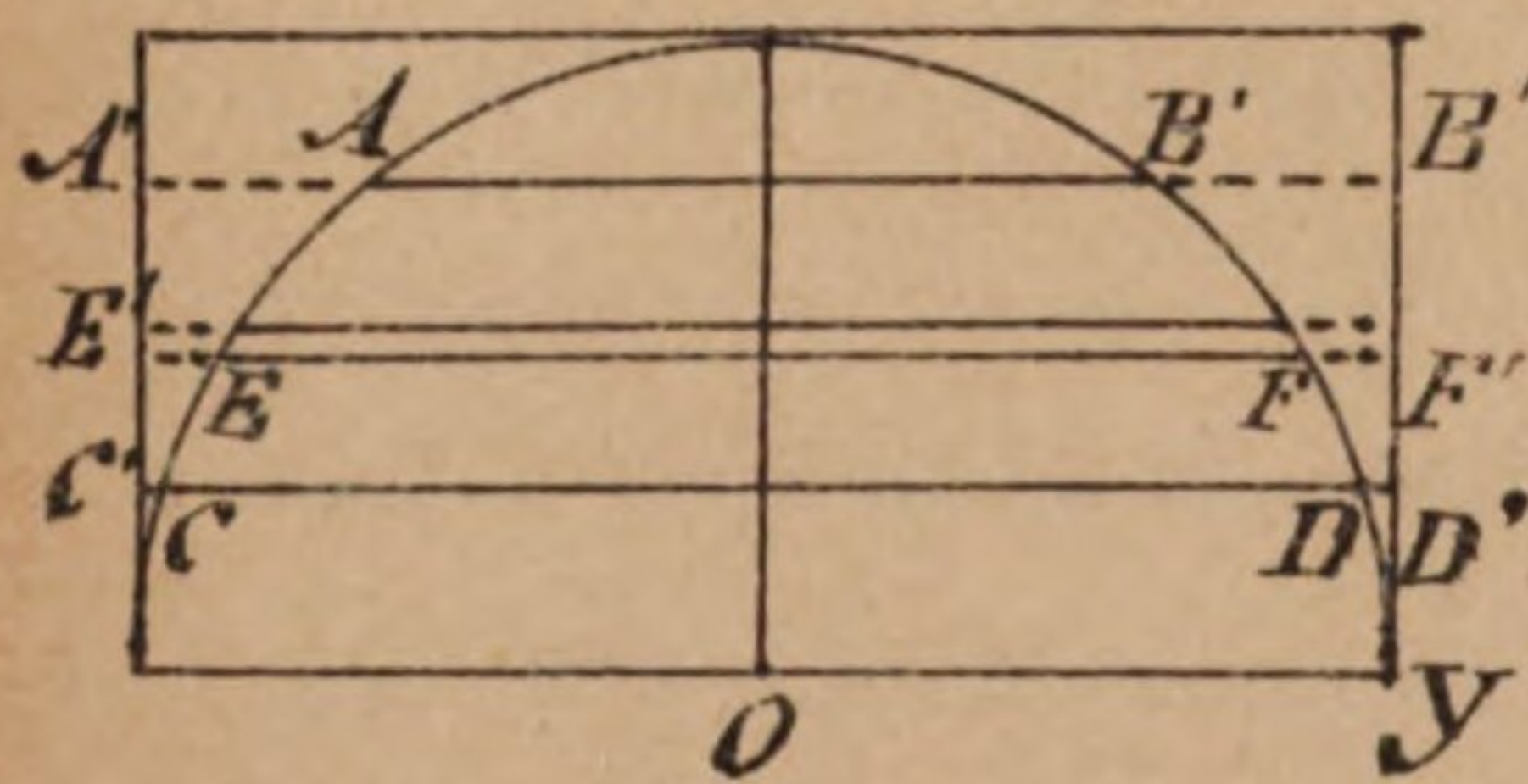
von oben fläche um $\frac{h}{3} \cdot \frac{b + 2a}{a + b}$
von der unteren fläche um $\frac{h}{3} \cdot \frac{a + 2b}{a + b}$

Sind aber im Allgemeinen F und G die Summe der un-
teren und der oberen Lageungsumflüge, so ist $a : b = \sqrt{F} : \sqrt{G}$, u. die Abstände
des Pyramidenpunkts von beiden flächen sind:

$$\frac{h}{3} \cdot \frac{\sqrt{G} + 2\sqrt{F}}{\sqrt{G} + \sqrt{F}} \text{ und } \frac{h}{3} \cdot \frac{\sqrt{F} + 2\sqrt{G}}{\sqrt{F} + \sqrt{G}}$$

Von dem Pyramidenpunkt einer Kugelzone zu finden, bemerkt man zunächst, daß
derselbe offenbar in dem Lotte liegt, welches vom Mittelpunkte der Kugel

auf die Begrenzungsflächen der Zune gefällt wird. zerlegt man aber, ein solches statisches Moment für eine tiefen Platten parallele Ebene OY zu finden, die Zune in kleine unregelmäßige Elemente,



so ist bekanntlich das Element EF dieselbe Ober-

fläche von das Element $E'F'$; und da

beide in derselben Höhe liegen, so ist auf das statische Moment beider gleich. Es ist somit

die Summe der statischen Momente der Zune gleich der des Zylinders $A'B'D'C'$; und ebenso die Oberfläche der einen gleich der des andern. Mit hin müssen die Schwerpunkte, deren Entfernung vom Mittelpunkt durch die Achsen OY dargestellt werden, zusammenfallen, und der Schwerpunkt der Zune ist somit von diesen Endflächen gleichweit entfernt. Dementselbe gilt für eine Salotte, wo nur die eine Endfläche in einem Punkt übergeht.

N. 25. Schwerpunktsbestimmungen für Körper.

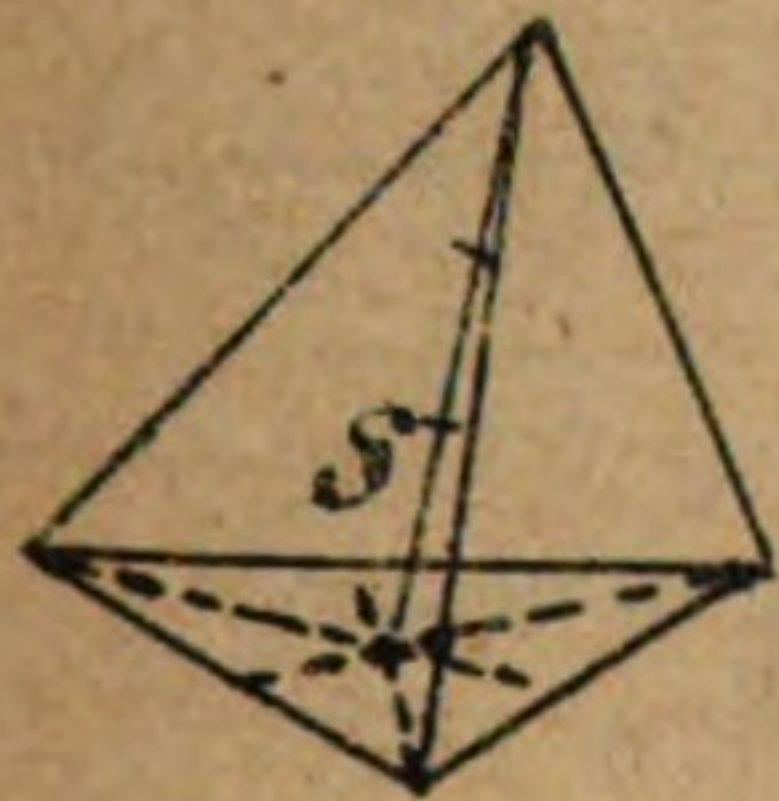
Der Schwerpunkt eines zylindrischen oder prismatischen Körpers, welcher aus parallelen Platten begrenzt ist, wird gefunden, indem man den Körper in seine Platten zerlegt, welche tiefen Flächen parallel sind. Die Schwer-



punkte dieser Platten liegen offenbar in der Schwerpunktslinie des Körpers. Setzt man sich die Masse jeder Platte unabhängig in ihrem Schwerpunkt, so wird diese Linie gleichmäßig belastet, und der Schwerpunkt liegt also in ihrem Mittelpunkt.

Eine dreiseitige Pyramide, ebenso zerlegt, gibt als Schwerlinie die

Verbindungsline einer Ecke mit dem Schwerpunkte der gegenüber-
liegenden Seite; und die drei Schwerlinien, welche man so ziehen kann,
schneiden sich im Schwerpunkte. Aber man erhält dieselben Schwerlinien,
wenn man sich nur in den Ecken, u. zwar in allen gleichviel, Masse



concentriert steht; eine solche Pyramide muß also den-
selben Schwerpunkt haben wie eine mit Masse gefüllte.

Man bringt man also die Masse der unteren Ecken im Schwer-
punkt der Grundfläche, so wiegt in ihr dreimal so viel
Masse concentrirt, wie in der gegenüberliegenden Ecke. Die entsprechende
Schwerlinie hat also den Schwerpunkt an demjenigen Punkte, welcher
von der Spitze der Pyramide dreimal so weit entfernt ist, wie von
dem Schwerpunkt der Grundfläche. Dieser Punkt ist also auf der Schwer-
punkt der Pyramide. Die Schwerlinien schneiden sich daher im Schwer-
punkte von 1 zu 3.

Ist die Pyramide abgestumpft durch einen der Basis parallelen Schnitt,
so mag h die Höhe der restlichen Pyramide sein, H die Höhe der ganzen,
 $H - h = d$ die Höhe der abgestumpften. Ist m die Masse des
abgeschnittenen Schwerpunkts von der unteren, y von der oberen Endfläche der ab-
gestumpften Pyramide, so sind die statischen Momente in Bezug auf
eine durch die Spitze gelegte Ebene, welche der Basis parallel ist:

der oberen Pyramide, deren Gewicht $= m, \quad \frac{3h}{4} m$

der abgestumpften, deren Gewicht $= M - m, \quad (y + h)(M - m)$

der ganzen Pyramide, deren Gewicht $M : \quad \frac{3H}{4} M.$

Man hat also die Gleichung

$$3HM = 3hm + 4(y+h)(M-m).$$

Es sind noch die Massen zu erhalten in die Seitenhöhen der Pyramiden, so kann man dafür setzen:

$$3(H^4 - h^4) = 4(y+h)(H^3 - h^3), \text{ oder nach Aufloesung}$$

$$(y+h) = \frac{3}{4} \frac{H^3 + H^2h + Hh^2 + h^3}{H^2 + Hh + h^2}$$

Dies gibt den Abstand von der Spitze der Pyramide. Für die Abstände von den Pfeilspitzen erhält man aber folgende:

$$y = \frac{H-h}{4} \cdot \frac{3H^2 + 2Hh + h^2}{H^2 + Hh + h^2} \quad x = \frac{H-h}{4} \cdot \frac{H^2 + 2Hh + 3h^2}{H^2 + Hh + h^2}.$$

Setzt man nun für $H-h$ die Höhe der abgestumpften Pyramide, u. bemerkt, daß die Höhen sich verhalten wie die Antriebskräfte der Bewegungsfelder,

$$H:h = \sqrt{F}:\sqrt{f}, \text{ so kommt}$$

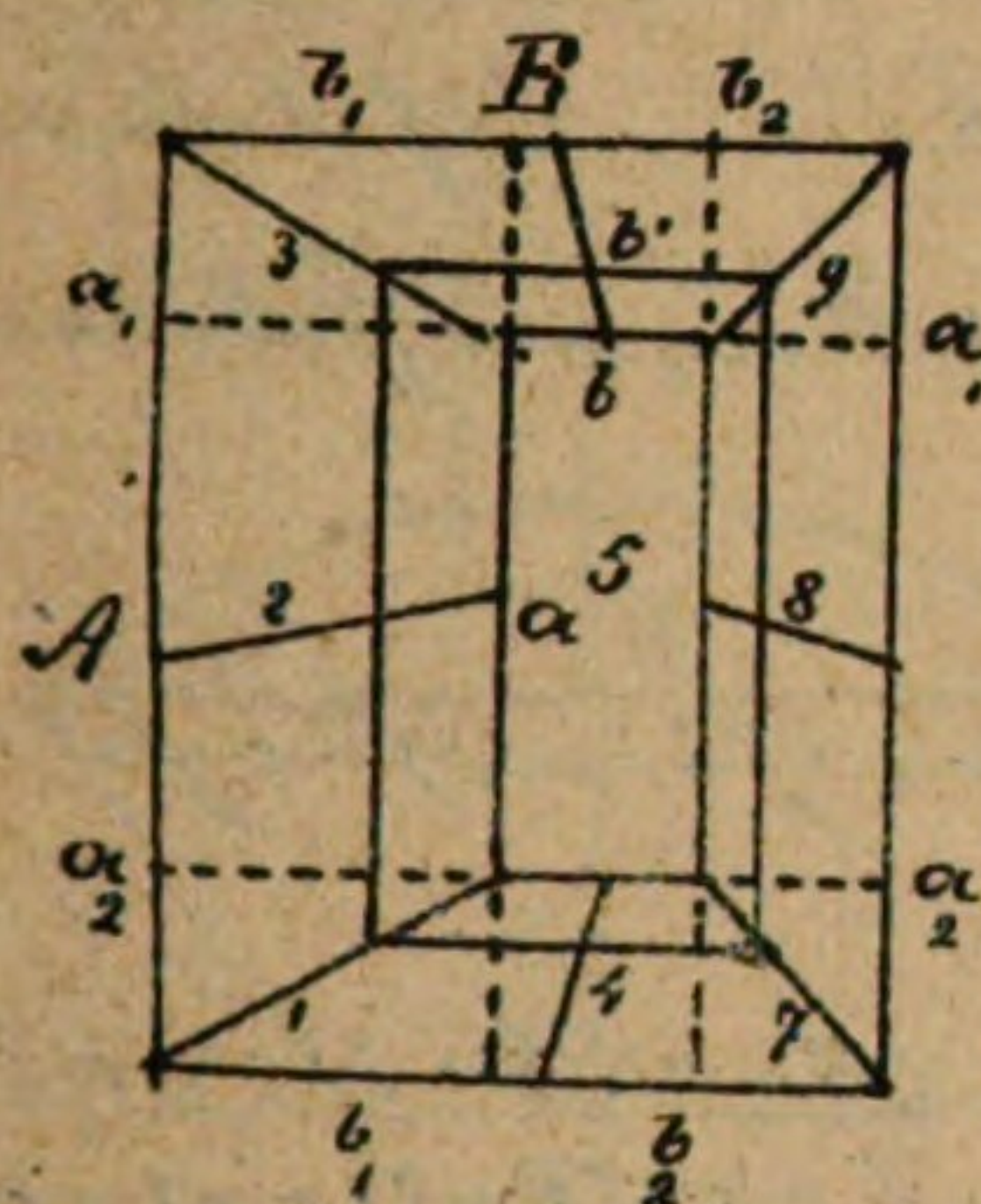
$$y = \frac{d}{4} \cdot \frac{3F + 2\sqrt{Ff} + f}{F + \sqrt{Ff} + f}, \quad x = \frac{d}{4} \cdot \frac{F + 2\sqrt{Ff} + 3f}{F + \sqrt{Ff} + f}.$$

Da außerdem der Schwerpunkt ebenfalls auf der Verlängerungslinie der Pfeilspitze beider Bewegungsfelder liegt, so ist seine Lage hierauf vollständig bestimmt.

Diese Betrachtungen in Formeln fassen aber eben auch auf giltig für jede beliebige der abgestumpften Pyramiden der Regel. Denn man kann diese Figuren immer in dreieckige Pyramiden zerlegen, deren Schwerpunkte dann sämtlich in einer in derselben Ebene liegen, welche den Bewegungsfeldern parallel ist.

Der Schwerpunkt eines Systems kann so tief gefunden werden, daß man dasselbe in Pyramiden zerlegt, u. deren Schwerpunkte bestimmt. Setzt man sich dann die Masse jeder Pyramide in ihrem Schwerpunkt concentrirt, und trägt den Schwerpunkt dieses Massensystems, so erhält man den Schwerpunkt.

ganzel des Folgenden. Als Beispiel einer solchen Zerlegung mag ein Quader dienen.



Die Zerlegung gibt die Projektion desselben, AB ist das untere Rechteck, a, b das obere. Legen wir nun irgend einen Punkt durch den Körper, welcher der Luftfläche parallel ist, so ist leicht zu zeigen, daß der Schnittpunkt desselben auf der Linie liegt, welche der Mittelpunkt der Luftflächen verbindet. Denn legen wir durch den Körper zwei Punkte, welche durch die Mitten der

entgegenstehenden Seiten der Grundflächen gehen, so werden dieselben sich in der Mitte des Körpers schneiden, welches den Parallelschnitt begrenzt. Die Schnittlinie beider Ebenen geht also durch den Mittelpunkt jedes der Grundflächen parallel zum Schnitt, d. h. durch alle Schnittpunkte zweier Ebenen, welche, durch Flächen parallel, aus dem Körper geschnitten werden. Dies ist also eine Gerade Linie des Körpers.

Daß es uns nun nötig ist, den Abstand des Schnittpunktes von der Grundfläche AB aufzufinden. Wenn wir also durch den Körper einen Schnitt legen, welcher durch die Seiten des oberen Rechtecks gehen, und gegen die Luftflächen senkrecht stehen, so zerfällt der Körper in die 4 vierseitigen Körperchen 1 3 7 9 in die 4 vierseitigen Körperchen 2 6 8 4, in die 4 vierseitigen Körperchen 5. Da alle dieselben Körperchen haben, so verhalten sich ihre Massen wie die Grundflächen, bezüglich der 1 2 3 sind, d. h. wie

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 3 & 7 & 9 & 2 & 6 & 8 & 4 & 5 \\ \frac{a_2 b_1}{3} & \frac{a_1 b_1}{3} & \frac{a_2 b_2}{3} & \frac{a_1 b_2}{3} & \frac{a b_1}{2} & \frac{b a_1}{2} & \frac{b_2 a}{2} & \frac{b a_2}{2} & b a \\ \hline \frac{h}{4} & & & & \frac{h}{3} & & & & \frac{h}{2} \end{array}$$

mit die Ausdrücke der Massen von den Grundflächen sind

wenn h die Höhe des Obeliskens ist. Sittes wird also die statischen Momente in Bezug auf die Grundfläche, so wirkt am Hebelarm

$$\frac{h}{4} \text{ eine Kraft } \frac{(a_1 + a_2)(b_1 + b_2)}{3} = \frac{(A - a)(B - b)}{3}, \text{ am Hebelarm}$$

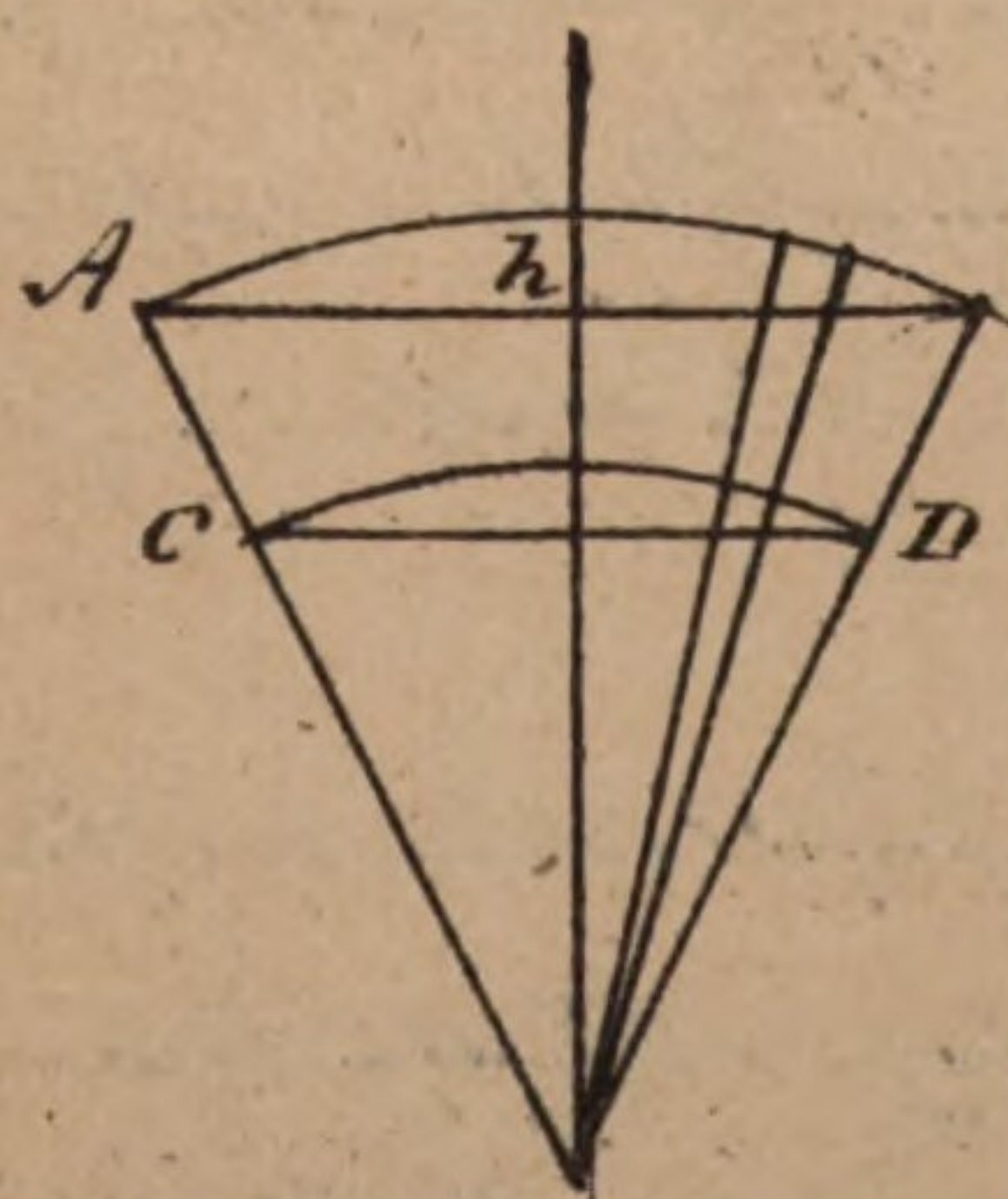
$$\frac{h}{2} \text{ eine Kraft } \frac{a(b_1 + b_2) + b(a_1 + a_2)}{2} = \frac{aA + Bb - 2ab}{2}, \text{ am Hebelarm}$$

$$\frac{h}{2} \text{ eine Kraft } ba.$$

also ist der gesuchte Abstand des Pflanzpunktes von der Grundfläche:

$$x = h \cdot \frac{\frac{A - a \cdot B - b}{12} + \frac{aA + Bb - 2ab}{6} + ab}{\frac{A - a \cdot B - b}{3} + \frac{aA + Bb - 2ab}{2} + ab} = \frac{h}{2} \cdot \frac{(A + a)(B + b) + 2ab}{(A + a)(B + b) + ab + AB}.$$

Der Pflanzpunkt eines Kugelabschnittes wird leicht gefunden, daß man sich denselben in kleine Kugel zerlegt denkt, deren Grundflächen kleiner



Kugelselemente sind in kleinen Zylinder im Centrum liegen.

Der Pflanzpunkt sämtlicher Kugel ist am Mittel-

punkt um $\frac{3}{4}$ des Radius entfernt, u. bilden also

eine Kugelschale von materieller Oberfläche, wenn

man sich in ihren tiefsten der Kugel concentrisch

denkt. Der Pflanzpunkt derselben liegt also auf

der Mitte ihrer Höhe: mit h ist $\frac{3}{4}$ von der Höhe der Kugel sein muß,

welche dem gegebenen Kugelabschnitt angehört, so ist die Entfernung

des gesuchten Pflanzpunktes vom Mittelpunkt:

$$\frac{3}{4} r - \frac{3}{8} h = \frac{3}{8} (2r - h).$$

Es mag sich auf den Pflanzpunkt eines Kugelabschnittes zu finden.

Zerfallen wir den Kugelabschnitt in einen Kugel u. in den Kugelab-

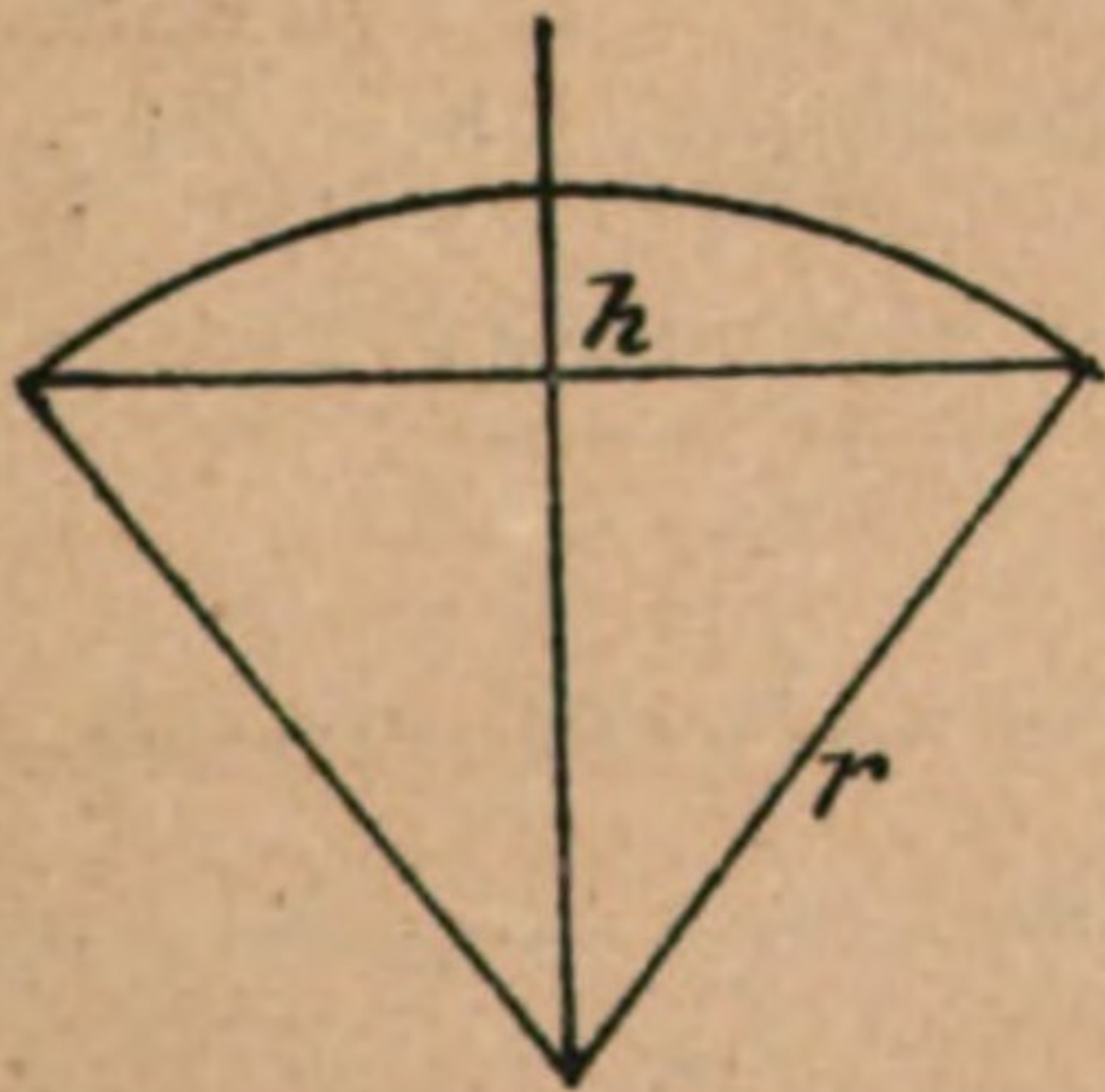
schnitt, dann ist die Höhe der Kugel $r - h$ und der Abstand seines Pflanz-

geschnitt vom Centrum ist $\frac{3}{4}(r-h)$; und h die Höhe des Kugelabschnitts bestimmt. Der Inhalt des Kugelabschnitts ist

$$\frac{1}{3}(r-h)(r^2-(r-h)^2)\pi = \frac{r-h}{3}(2hr-h^2)\pi$$

also sein statisches Moment:

$$\frac{(r-h)^2}{4}(2hr-h^2)\pi.$$



Der Inhalt des Kugelabschnitts ist $\frac{2hr-h^2}{3}\pi$,
und da nach dem Obigen der Abstand seines
Schwerpunkts vom Centrum $\frac{3}{8}(2r-h)$ ist, so
wird sein statisches Moment

$$\frac{1}{4}(2r-h)hr^2\pi.$$

folglich ist der Inhalt des Abschnitts

$$\frac{2hr-h^2}{3}\pi - \frac{2r-h}{8}(2hr-h^2)\pi = \frac{h^2(3r-h)}{3}\pi.$$

ist also x der Abstand des gegebenen Schwerpunkts vom Mittelpunkt,
so wird

$$x \cdot \frac{h^2(3r-h)}{3}\pi = \frac{(2r-h)hr^2\pi}{4} - \frac{(2r-h)(r-h)^2h\pi}{4};$$

also endlich

$$x = \frac{3}{4} \frac{(2r-h)^2}{3r-h}.$$

1.

S. 26. Gleichgewicht eines starren Körpers.

Damit ein starrer Körper unter dem Einfluß eines Kräftesystems im Gleichgewicht sei, ist es nöthig und hinreichend, daß die Resultante u. des Kräftesystems verschwindet, durch welche man das System ersetzen kann. Die Gleichungen 3. 4. des S. 21. gelten dann in der folgenden über:

$$1 \dots A = 0 \quad B = 0 \quad C = 0 \quad A' = 0 \quad B' = 0 \quad C' = 0,$$

welche die Gleichgewichtsgleichungen nur für beweglichen Körper sind. Ist der Körper nicht vollkommen frei beweglich, so ist es nicht nöthig, daß die Resultante u. des Kräftesystems verschwindet, sondern diese Bedingung zur Bestimmung der Bedingung dienen, welche durch die Unterstützungspunkte entstehen. Letzteren wird man sich einen Körper, welcher in einem Punkte festgehalten wird. In diesem Fall können wir den Angriffspunkt des Resultantes in diesen Punkt verlegen, welcher zugleich der Aufhängepunkt des Körpers sein mag, das übrige Gleichgewichtssystem muß dann verschwinden. In diesem Fall bestimmen alle Gleichungen:

$$2 \dots R \cos p = A \quad R \cos q = B \quad R \cos r = C.$$

Die Größe des Punktes $R = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, welche das feste Punkt erfährt, und die Winkel $p \ q \ r$ geben die Richtung desselben an. Die anderen Gleichungen gelten aber, da M verschwinden muß, aber in

$$3 \dots A' = 0 \quad B' = 0 \quad C' = 0,$$

welche notwendige Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht sind. Ist der Körper in zweien Punkten befestigt, so kann er sich nur noch um die Axe drehen, welche durch jene Punkte geht. Wenn man also die Resultante in einem dieser Punkte angreifen läßt, so wird sie durch die Unbeweglichkeit der Axe vollständig aufgehoben. Das resultierende Paar da es aber dann keinen Componenten haben, welche um die feste Axe drehen würde; seine Axe muß daher

2.

gegen die feste Axe punktförmig sein. Ist die feste Axe die Z-Axe, so muß man da-
für $a = b = 0$ setzen u. zugleich $\cos \alpha = 0$, so daß sich die S. 21. 2. die Be-
dingung ergibt:

$$4 \dots C' = 0$$

Um aber den Druck zu ermitteln, wählen wir beide Unterstützungs-
punkte so, daß man sich die Resultierenden aus der Kraft S und
den beiden Kräften R_1, R_2 , die auf die Unterstützungs-
punkte (c_1, c_2) angreifen, mit gegen die X-Axe
den Winkel p_1, p_2 bilden; vorausgesetzt, S, in die feste Axe fällt. In solchen
Fällen ist der Druck der Kraft S vorangeordnet, Druck auf die beiden
Unterstützungspunkte vertheilt, kann man nicht angeben, wenn man den Körper
als vollkommen Starr betrachtet. In den Gleichungen der S. 21. set man $M = 0$ zu
setzen, daß die resultierende Kraft aber die gegebenen sein einzuführen.

Es erhält man:

$$A = R_1 \cos p_1 + R_2 \cos p_2 \quad B' = c_1 R_1 \cos p_1 + c_2 R_2 \cos p_2 \quad C = S$$

$$B = R_1 \sin p_1 + R_2 \sin p_2 \quad A' = c_1 R_1 \sin p_1 + c_2 R_2 \sin p_2$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich folgendes:

$$5 \dots R_1 \cos p_1 = \frac{c_2 A - B'}{c_2 - c_1}, \quad R_2 \cos p_2 = \frac{c_1 A - B'}{c_1 - c_2}$$

$$R_1 \sin p_1 = \frac{c_2 B + A'}{c_2 - c_1}, \quad R_2 \sin p_2 = \frac{c_1 B + A'}{c_1 - c_2}$$

weil R, p , vollständig bestimmt sind. Diese Gleichungen gelten auch
noch, wenn der Körper auf der horizontalen Linie der Unterstützungs-
punkte aufliegt. Dann aber muß die Kraft S, welche in der Richtung der X-Axe
vorhanden würde, auf verschwinden, und man erhält daher die
zwei Bedingungen

$$6 \dots C = 0, \quad C' = 0.$$

Ist der Körper in drei Punkten fest, so ist keine Bewegungsgleichung mehr nötig, da der Körper sich nicht bewegen kann. Man kann dann leicht die Punkte zusammen bestimmen, welche die Unterstützungspunkte berührt gegen die durch sie gelegte Ebene verlaufen. Die anderen Punkte zusammen lassen sich weiterum bestimmen; denn da sie in der Ebene der Unterstützungspunkte fallen, so muß man nicht nur sie auf die einzelnen Punkte zu vertheilen. Man erhält also folgende resultierende Elemente ein:

1. Drei Punkte X, X_2, X_3 , welche in den gegebenen Punkten eingreifen. Die Ebene der Angriffspunkte sei der X, Y Ebene u. die Coordinaten der Punkte a, b, a_2, b_2, a_3, b_3 .

2. Eine Resultante R , welche in der Ebene der Unterstützungspunkte liegt. Die Distanz gegen die X Axe von Punkt P , u. ihr Angriffspunkt habe die Coordinaten X, Y . Dann erhalten wir aus N. 21. folgende Gleichungen:

$$R \cos p = A \quad R \sin p = B, \quad R (X \cos p - Y \sin p) = C$$

$$X_1 + X_2 + X_3 = C \quad X_1 a_1 + X_2 a_2 + X_3 a_3 = -B' \quad X_1 b_1 + X_2 b_2 + X_3 b_3 = A'$$

Die ersten beiden Gleichungen bestimmen R , und die dritte ist die Gleichung der gestrichelten Linie, in welche R fällt. Die anderen drei Gleichungen bestimmen die Punktekräfte.

$$N X_1 = C(b_2 a_3 - b_3 a_2) + A'(a_2 - a_3) + B'(b_2 - b_3)$$

$$N X_2 = C(b_3 a_1 - b_1 a_3) + A'(a_3 - a_1) + B'(b_3 - b_1)$$

$$N X_3 = C(b_1 a_2 - b_2 a_1) + A'(a_1 - a_2) + B'(b_1 - b_2)$$

und der Körper wegen $N = (b_2 a_3 - b_3 a_2) + (b_3 a_1 - b_1 a_3) + (b_1 a_2 - b_2 a_1)$ gesetzt ist. Ist der Körper auf der Ebene der Unterstützungspunkte aufliegend, so muß R verschwinden, d. h. man muß die Bewegungsgleichungen erfüllt haben:

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0.$$

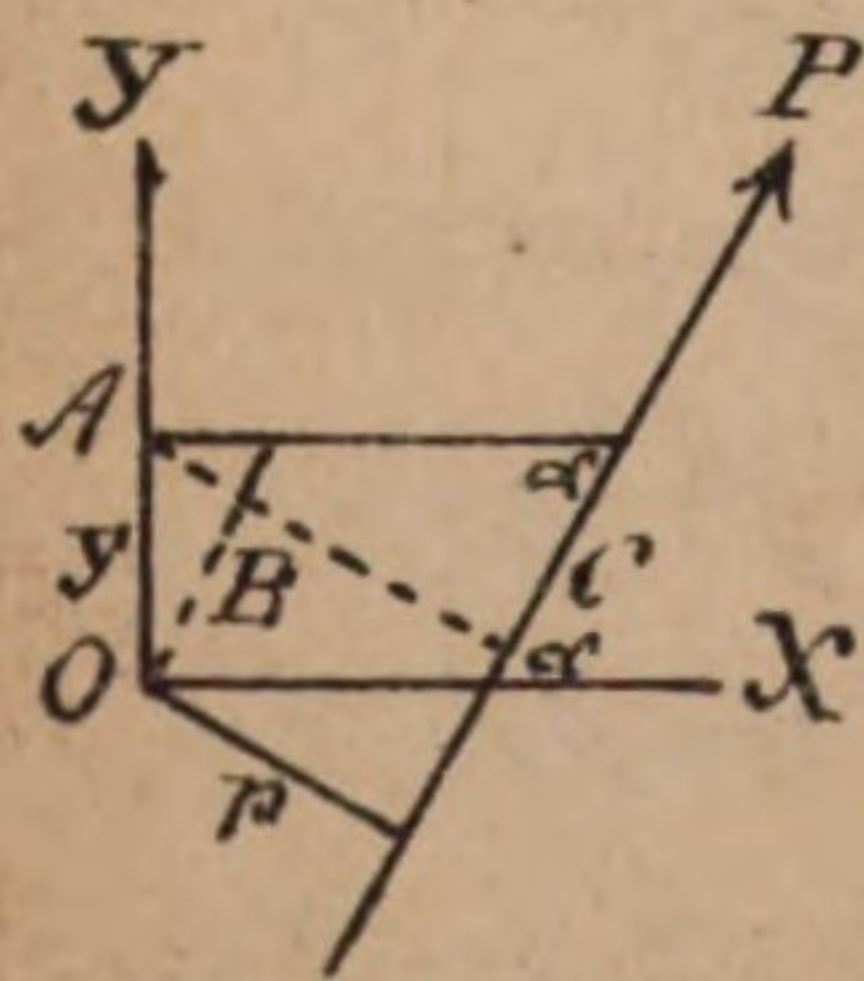
§. 27. Gleichgewicht bei der Existenz einer festen Axe.

Betrachten wir nun insbesondere den Fall näher, wo der Körper um eine feste Axe drehbar ist, mit der Kräfte sämtlich gegen die Axe senkrecht gerichtet sind, also, wenn jene Axe wieder die Z -Axe ist, sämtlich in Ebenen liegen, welche die XY -Ebene parallel sind. In diesem Falle vorbestimmt $\cos \varphi$ für alle Kräfte n .
es wird $\cos \beta = \sin \alpha$ daher ist

$$A = \sum P \cos \alpha \quad B = \sum P \sin \alpha \quad C = 0$$

$$A' = - \sum P_x \cos \beta \quad B' = \sum P_x \cos \alpha \quad C' = \sum P(x \sin \alpha - y \cos \alpha).$$

Die Gleichungen (4) $C' = 0$ läßt sich dann in einer sehr einfachen Weise darstellen, da wie die Figur zeigt, der Ausdruck $x \sin \alpha - y \cos \alpha = AC - AB = p$



gleich dem Abstand der Wirkungslinie der Kraft P von der Drehungsaxe wird. Es ist daher $P(x \sin \alpha - y \cos \alpha)$ nichts anderes als das statische Moment der Kraft P in Bezug auf die Drehungsaxe, mit positivem oder negativem Vorzeichen je nach dem Sinne, in welchem P den Körper zu drehen bestrebt.

Die Gleichung 4 geht daher über in

$$\sum P p = 0,$$

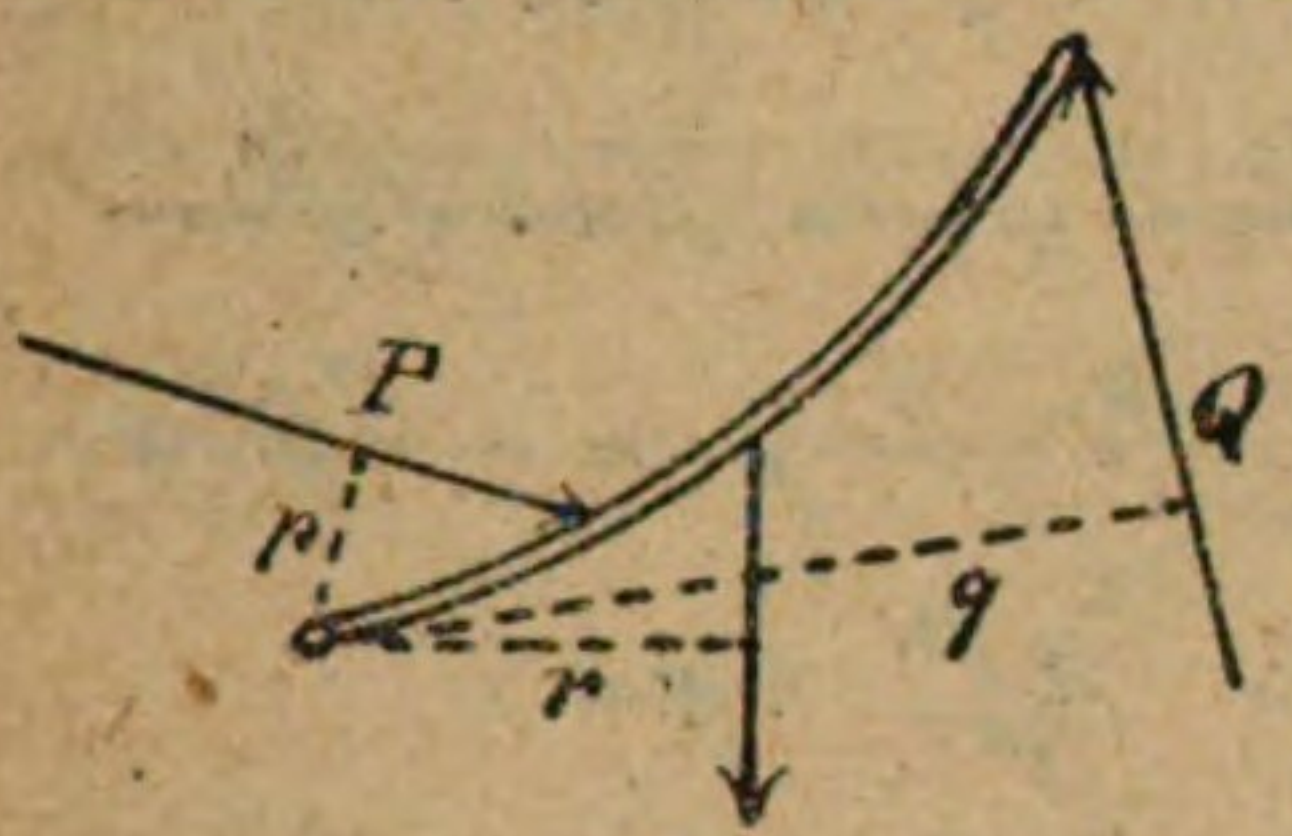
S. f. damit Gleichgewicht bestehe, muß die Summe der statischen Momente verschwinden. Wenn diese Summe nicht verschwindet, so kann man sich immer

eine Kraft Q hinzugefügt denken, welche in einer Entfernung q von der Drehungsaxe wirkt, mit welcher jener Körper das Gleichgewicht hält, dann muß notwendig

$$Q q + \sum P p = 0$$

sein, oder es muß das statische Moment der hinzugefügten Kraft dasjenige der übrigen statischen Momente gleich und entgegengesetzt sein.

hierzu gehört unter anderem die Theorie des materiellen Hebels. Ist ein
 Hebel von zwei Kräften P & Q angegriffen, welche vom Unterstützungs-
 punkte aus wirken, und ist ferner die Tangente der Kurve,
 welche der Hebel gelegte Vertikale mit T vom Unter-
 stützungs-punkte entfernt, a das eigene Gewicht des Hebels,
 so hat man die Gleichung:

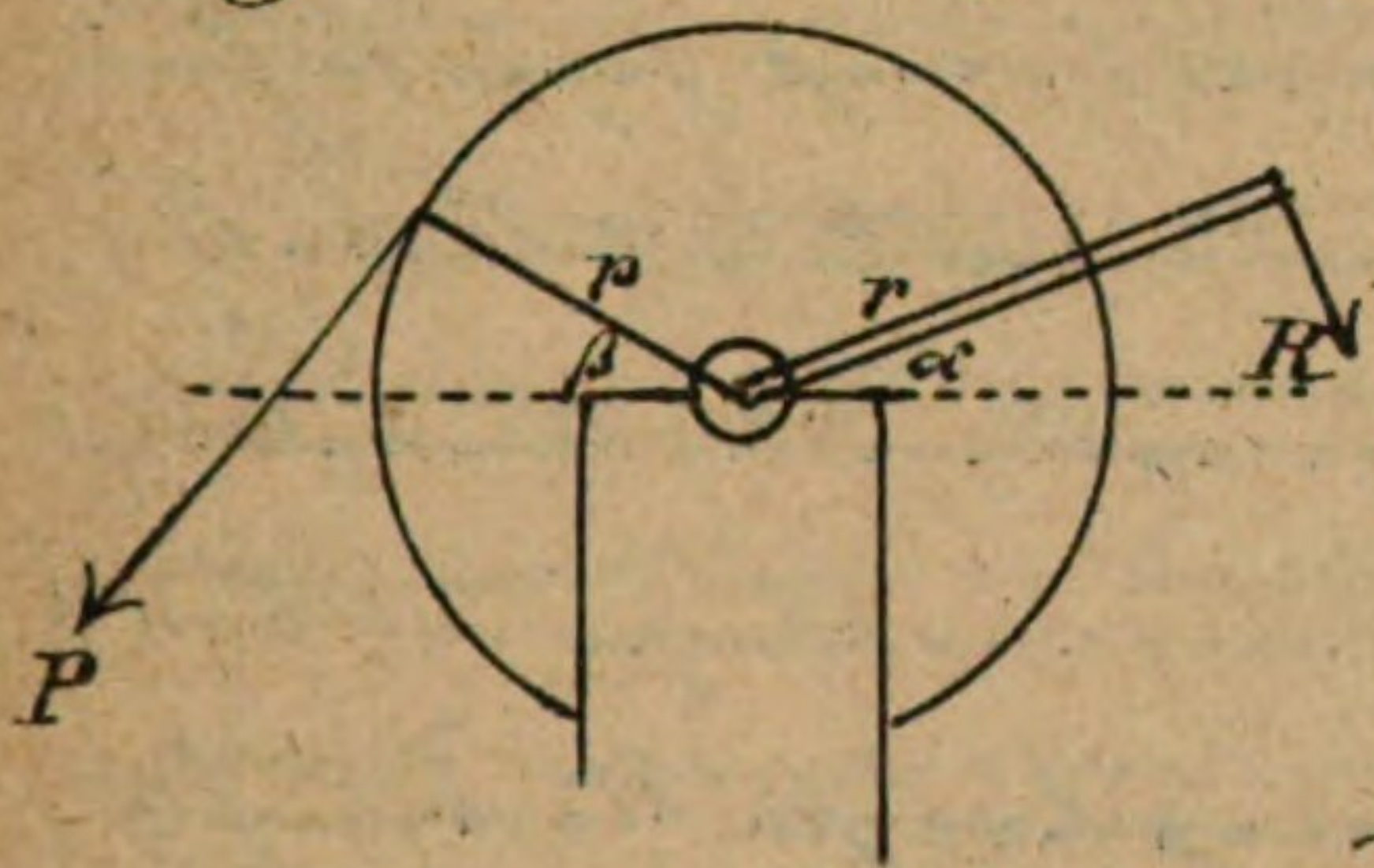


man $Pp + ar = Qq = 0$

$$Pp + ar = Qq = 0$$

zur Bestimmung dieses Gleichgewichts.

Ein anderes Beispiel liefert das Rad an der Welle. Ist P die Kraft,

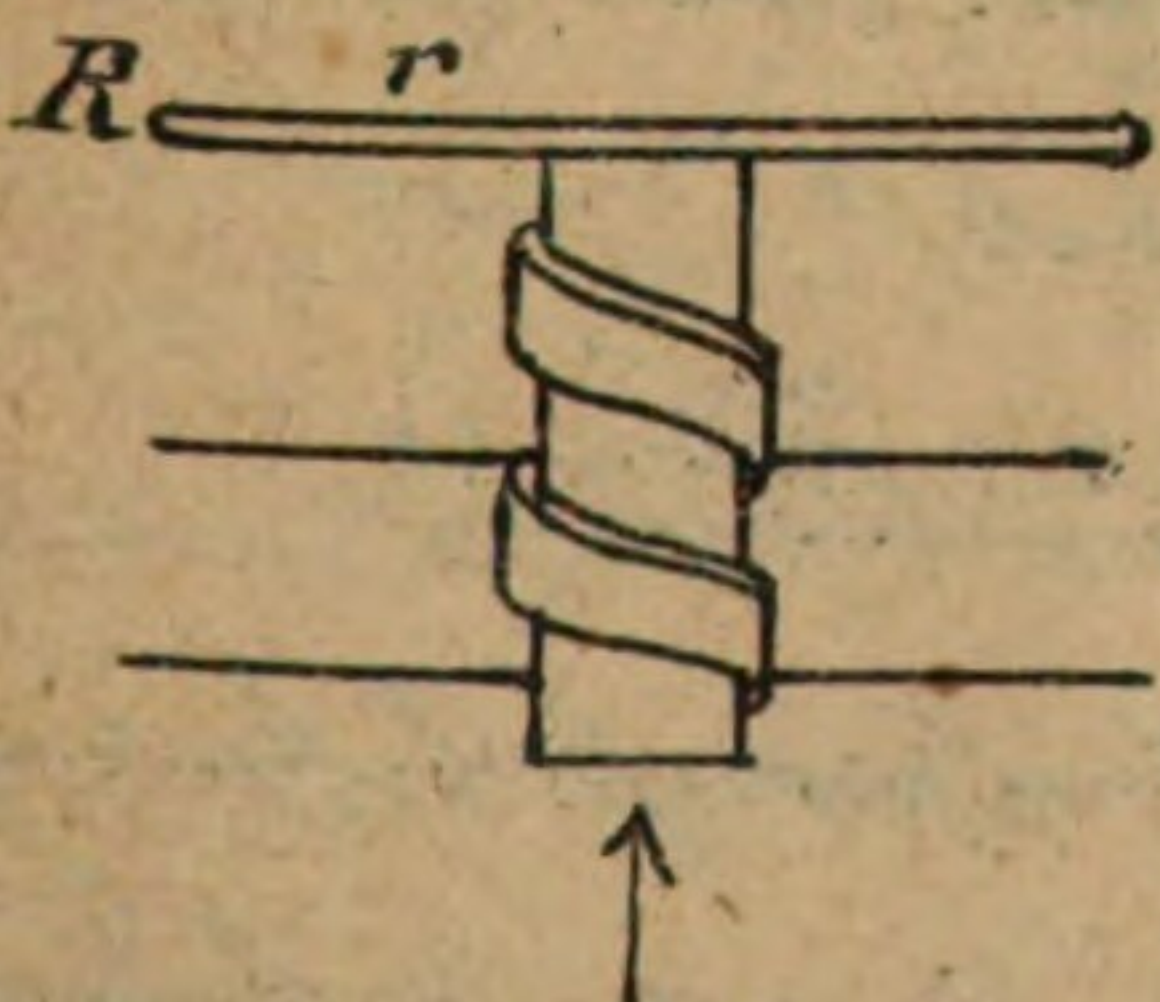


die am Rande des Rades angreift, p der Radius
 desselben; man findet dann für die Kraft R , welche
 die Kraft P an dem Türbelarm r des Gleichgewichts hält:

$$R = \frac{Pp}{r}$$

Der Punkt aber, welcher die Axe in vertikaler Richtung

erfüllt, ist, wenn a das Gewicht des beweglichen Apparats angiebt, $a + P \cos \beta$
 $+ R \cos \alpha$, was man hier in horizontaler Richtung den Punkt $P \cos \beta - R \cos \alpha$ erfüllt.

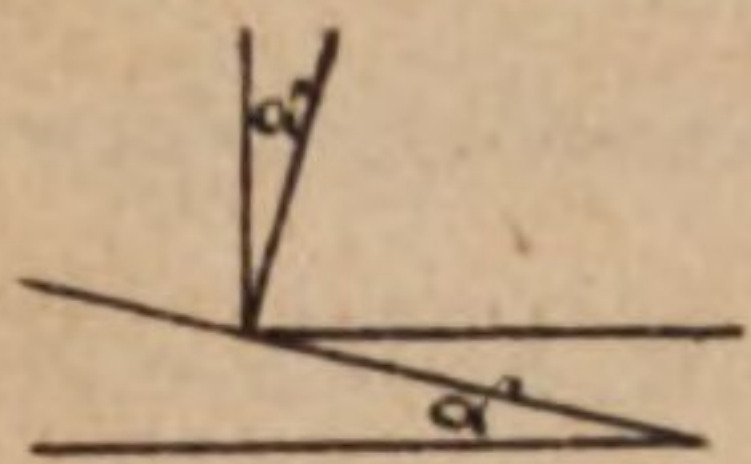


auf die Welle ist ein solches Krüger, welcher eine
 feste Axe durchläuft, die hier aber zugleich in der Richtung
 derselben verläuft und der Bewegung weislich. An dem
 unteren Ende wirkt eine Kraft P in der Richtung der Axe,
 welche das Gleichgewicht einer Kraft R gehalten

werden soll, welche oben am Hebelarm r wirkt, das ist D der Gesamtpunkt,
 den das System gegen die Systemmutter enthält. Dieser Punkt,
 welcher überall punktförmig gegen die Fläche des Gesamtpunktes sein muß, bildet
 immer gegen die Richtung der Axe den Winkel α , welcher die Richtung der

6.

gegebenes angibt, so hat also die Gesamtkomponente $D \cos \alpha$ in der Richtung



der Axe. Die andere Komponente, welche gegen die Axe senk-

recht ist, wirkt überall an einem Hebelarm g welcher von der

Achse des Gewichtes von der Axe angibt. Es gibt also als Kräfte ihrer statischen

Momente $D g \sin \alpha$. Und für das Gleichgewicht sind daher die Gleichungen nöthig:

$$D \cos \alpha = P, \quad D g \sin \alpha = R r, \quad \text{daher } R = \frac{P}{g} \tan \alpha.$$

Setzt man nun die Höhe eines Abhanges $= h$, so ist $\tan \alpha = \frac{h}{2\pi g}$, also

$$R = \frac{P h}{2\pi r}.$$

Anm. Hier mag zugleich die Ursache des Heils für alle Linsen. Auf im Fortma-

ssen Auschnitt im gleichförmigen Strahl ist, nicht senkrecht gegen die Grenz-

linie die Kraft P , sondern auf jeder anderen Seite im Normaltrieb D lastet.

Die Kräfte der Tangenten in Bezug auf die Halbkreislinie des Winkels (α)

wird vertheilt. Jede der Strahlkräfte D hat also eine Komponente $D \sin \frac{\alpha}{2}$

in dieser Richtung, während die zwei anderen Strahlkräfte gleichartige Kräfte

$- \pi \cdot D$ der Komponente $- \pi D \cos \frac{\alpha}{2}$ gibt. So muß daher die Gleichung



bestehen:
$$P = 2 D \left(\sin \frac{\alpha}{2} - \pi \cos \frac{\alpha}{2} \right) = 2 D \frac{\sin(\frac{\alpha}{2} - \pi)}{\cos \pi}.$$

Man sieht, daß die Kraft P je nach dem Winkel, welcher der Winkel

des Heils kleiner ist, als der doppelte Krümmungswinkel.

S. 28. Gleichgewicht schwerer und unterstützter Körper.

Sei ein Körper, der auf einer Fläche gelagt ist, sich im Gleichgewicht befindet

so daß er keinem Kräftepaar unterworfen sein, u. die Resultante nach Ent-

fernung der Unterstützungspunkte gegen, u. senkrecht sein gegen die gemeinsame Last

Tangenten der Fläche; dann muß man sehen, welche

kraft vermag die Unterstützungsfläche Hinterhand zu lassen. Sind also a, b, c die Coordinaten des Unterstützungspunktes, p, q, r die Winkel, welche die Normale gegen die Coordinatenachsen bildet, so ist notwendig,

$$\begin{aligned} A &= R \cos p & A' &= R (b \cos r - c \cos q) \\ B &= R \cos q & B' &= R (c \cos p - a \cos r) \\ C &= R \cos r & C' &= R (a \cos q - b \cos p) \end{aligned}$$

Ersetzung sind die Verhältnisse der sechs Größen $ABC, A'B'C'$ vollständig bestimmt, wenn nur noch der Factor R beliebig, welcher zugleich den Punkt angibt, welchen die unterstützende Fläche schneidet.

Ist insbesondere der Körper allein der Pflanzkraft unterworfen, welche durch eine im Pflanzpunkt angreifende Resultante ersetzt ist u. ist die unterstützende Fläche im Berührungspunkte horizontal, so genügt es für das Gleichgewicht, wenn die durch den Pflanzpunkt gelegte Verticale durch den Unterstützungspunkt geht. Der Körper kann also nur auf einer Stelle seiner Ober-

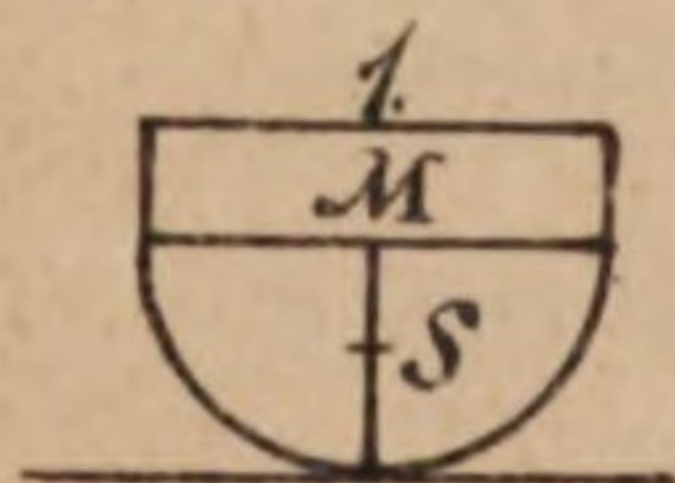
fläche ruhen, an welcher seine Tangentiale gegen die nach dem Pflanzpunkt gezogene Linie senkrecht ist, oder was dasselbe bedeutet, anjenigen Stellen der Oberfläche, deren Entfernung von dem Pflanzpunkt ein Maximum oder Minimum ist, d. h. geben



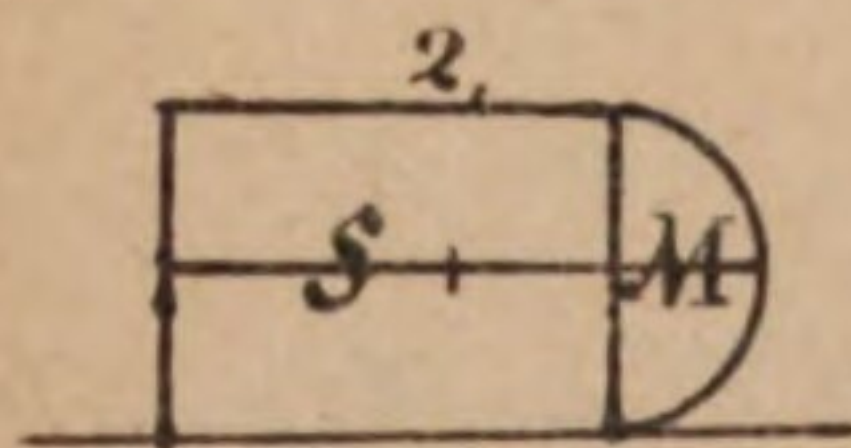
nur die letzteren Punkte ein wirklich stabiles Gleichgewicht an, voraussetzt der Körper, wenn er auf einer der ersten ruht, bei der kleinsten Fortschiebung seine Lage ändert, indem sein Pflanzpunkt die letzte Lage verläßt u. die letztere ist das stabile Gleichgewicht. Das Gleichgewicht wird endlich indifferent, wenn bei einer kleinen Verschiebung des Körpers die Höhe des Pflanzpunktes sich nicht ändert, oder wenn der Körper auf einem Hohl seiner

8.

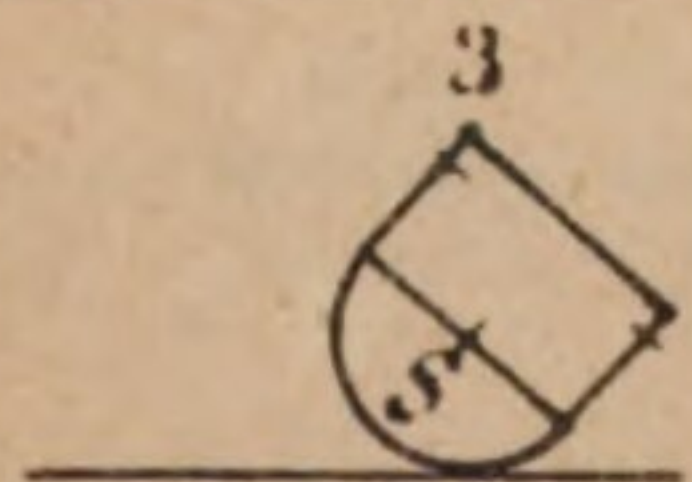
Oberfläche auf, in dessen Masse alle Punkte vom Schwerpunkt gleichweit entfernt sind. Es nennt ein Körper, welcher aus einem Halbkugel u. einem



gleichartigen Theile besteht, in Lage 1. u. u. befindet sich in tiefer in stabilem Gleichgewicht, wenn sein Schwerpunkt innerhalb des Halbkugel liegt. Liegt dagegen der Schwer-

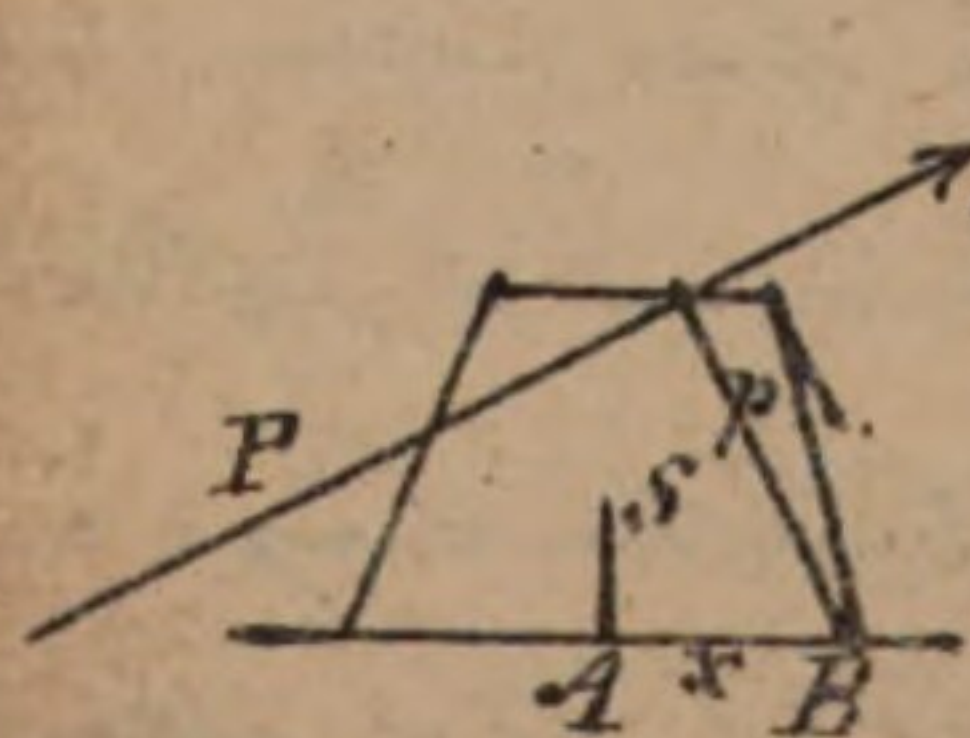


punkt in dem gleichartigen Theil, so ist die Lage 1. stabil u. 2. gilt die stabile Gleichgewichtslage an. Fällt nun S in den Mittelpunkt



M des Kugel, so ist der Körper in indifferentem Gleichgewicht, so daß ein beliebiger Punkt der Kugeloberfläche unterstützt

ist (3). Weisnet aber im Allgemeinen ein Körper durch die kleinste Verschiebung aus seiner Lage gebracht werden kann, u. kann entweder zurückkehrt (stabiles Gleichgewicht) oder eine andere Gleichgewichtslage annimmt (labiles), so ist bei einem Körper, der mit ebenen Basis auf einer ebenen Fläche auf, eine Kraft von unten her greift u. ausreicht, um ihn umzustürzen, u. ist die Wirkung einer anderen Gleichgewichtslage zuzuführen, ja sogar um ihn in eine Stellung aus seiner Lage zu versetzen. Will man in der Figur gezeichneten Kör-

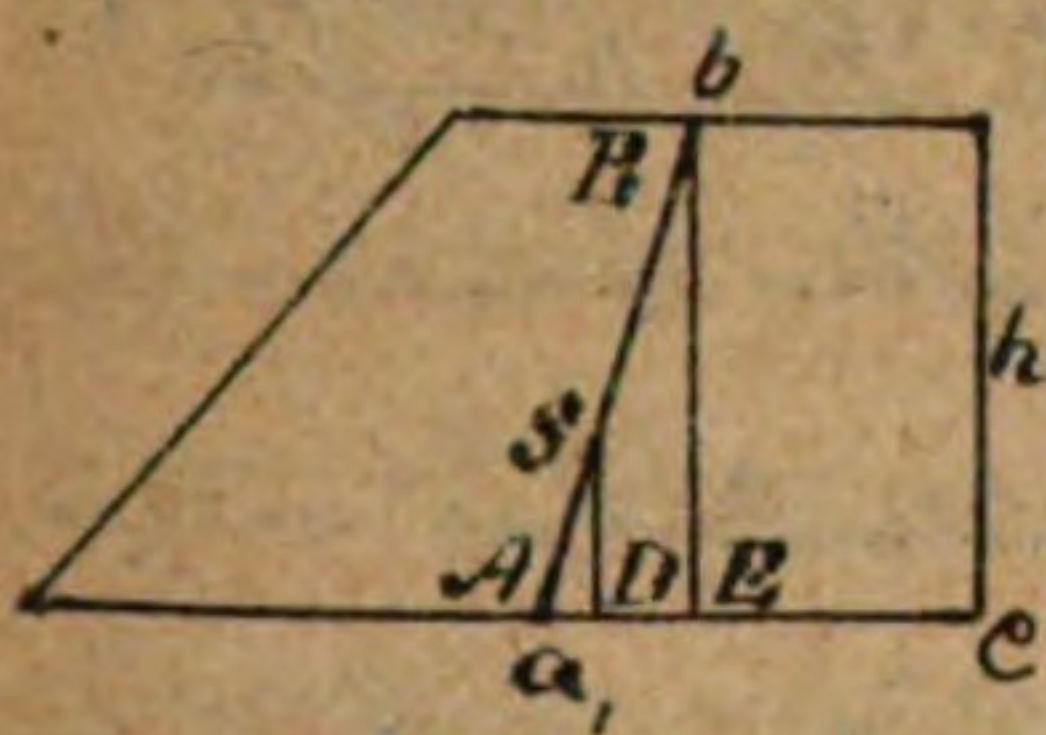


per, abgesehen von jeder gleitenden Bewegung, welche durch eine Hemmung beiderseits sein mag, durch eine Kraft P greifen lassen werden, indem er sich fortbewegt auf die Punkte B stützt, so nennt das statische Moment der Kraft P, näm-

lich Pp nicht nur gleich dem statischen Moment der Gewichtskraft in Bezug auf die Axe B sein, und da dies letztere gleich dem Product des Gewichtes mit der Entfernung des Schwerpunktes gelegten Verticals von B ist, so set man die Gleichung:

$$Pp = Gx$$

für den kleinsten Werth von P . Das Moment Gx nennt man daher das Maß der Stabilität des Krügers, in Bezug auf B als Umsturzpunkt. Die Stabilität ist Null, wenn der Schwerpunkt punktförmig über der Kante liegt, darüber hinaus kann er nie liegen, da sonst der Krüger von selbst umstürzen würde. Die Stabilität eines Krügers mit trapezförmigem Querschnitt u. einem rechteckigen Querschnitt, in Bezug auf die Kante C ist also ausgedrückt durch



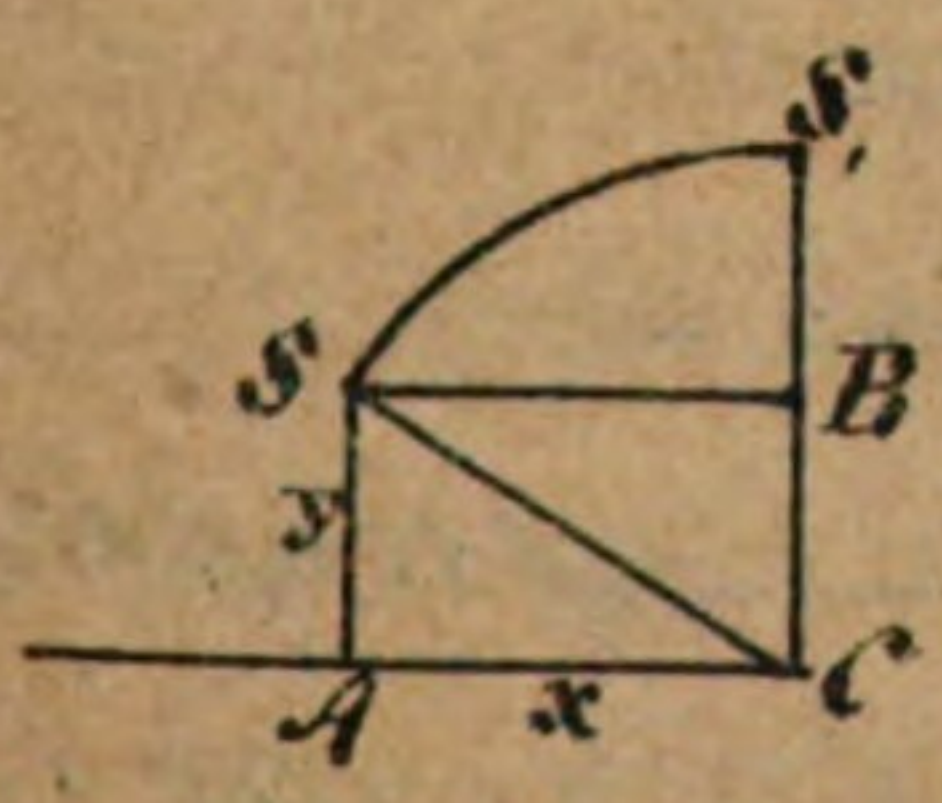
$$y \cdot l \frac{a+b}{2} \cdot h \cdot DC = y \cdot l \frac{a+b}{2} \cdot h \left(\frac{a}{2} - AD \right)$$
 wo l die Länge des Krügers, y das Gewicht eines Kubikmeters bedeutet.

Da nun ferner $\frac{AD}{AE} = \frac{SD}{BE}$, u. nach den Formeln für den Schwerpunkt eines Trapezes also

$$AD = \frac{a-b}{2} \cdot \frac{2b+a}{3(a+b)}, \text{ so wird der Ausdruck der Stabilität ausfall}$$

$$y \cdot l \frac{h}{2} \left(\frac{a(a+b)}{2} - \frac{(a-b)(2b+a)}{6} \right) = y \cdot l \frac{h}{6} (a^2 + ab + b^2).$$

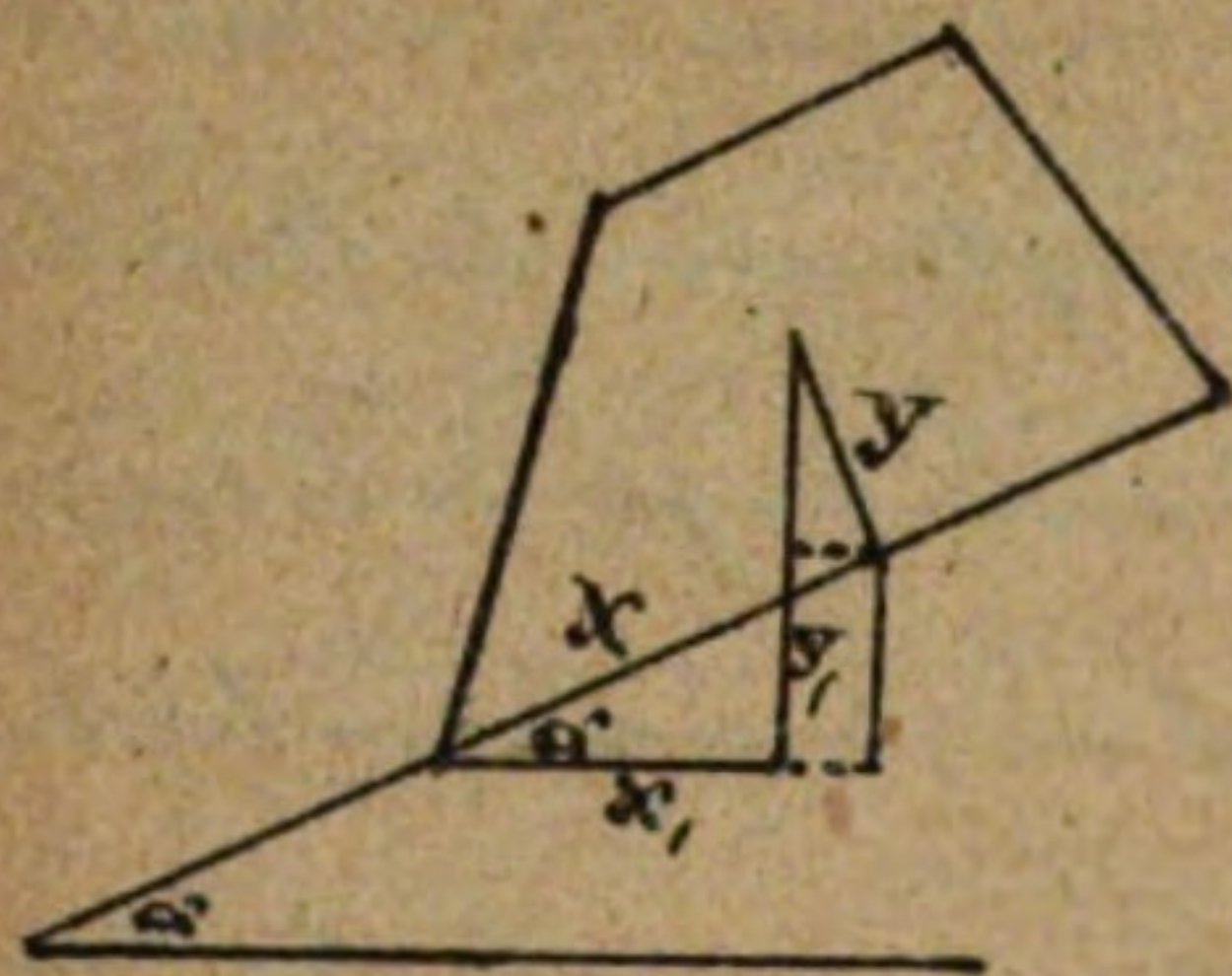
Will man zeigen, wieviel Stabilität notwendig ist, um den Krüger in der Stellung zu versetzen, so kann die Arbeit, welche der Krüger zum völligen Umsturz leistet, so kann dieselbe statisch ausgedrückt werden, daß der Schwerpunkt in die Stellung S'



gebracht werden muß, also um die Kante BS' gezogen. Die für zu nötige Arbeit ist daher $G(S, C - BC) = G(\sqrt{x^2 + y^2} - y)$, wo auf $G \frac{x}{y + \sqrt{x^2 + y^2}}$. Aus dieser Formel sieht man, daß die zum Umstürzen erforderliche Arbeit um so geringer wird,

je größer y , d. h. je höher der Schwerpunkt über der Unterstützungsfläche liegt. Ganz dieselben Betrachtungen gelten auch, wenn der Krüger auf einer schiefer Ebene gestützt ist, wo dann nur die Koordinaten x, y anders gewählt werden.

Sind x, y die neuen Koordinaten des Schwerpunktes in Bezug auf die Umstürzkante, α der Winkel der schiefer Ebene, so hat man:



$$x_1 = x \cos \alpha - y \sin \alpha, \quad y_1 = x \sin \alpha + y \cos \alpha.$$

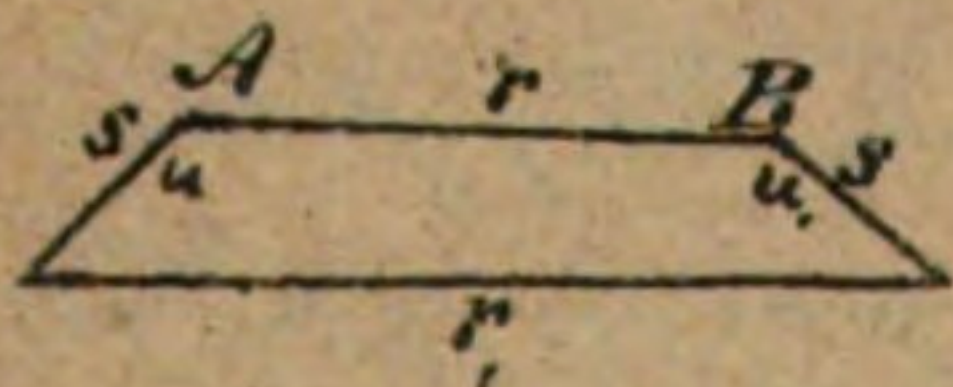
Die Stabilität ist Null, sobald der Neigungswinkel der Ebene so groß ist, daß

$$\tan \alpha = \frac{x}{y}, \text{ wo dann der Schwerpunkt}$$

senkrecht über der Umkehrkante zu liegen kommt.

S. 29. Arbeit. Virtuelle Geschwindigkeiten. Lebendige Kraft.

Betrachten wir ein System von Punkten, welches äußeren Kräften unterworfen ist, und zugleich durch innere Kräfte verbunden ist. Die gesamte Arbeit, welche bei einer gewissen Bewegung der Körper geleistet wird, zerfällt in die Summe aller Arbeiten, welche die äußeren Kräfte an den einzelnen Punkten leisten, und in die Arbeit W' der inneren Kräfte. Nur die Berechnung der letzteren erfordert eine neue Betrachtung. Seien A B zwei in unmittelbarer Nähe Punkte des Systems, die durch eine anziehende Kraft R verbunden werden. Einen Augenblick später, nachdem die Punkte die Plätze A_1 B_1 eingenommen haben, ist die



Beschleunigung T übergegangen in T_1 . Die Kraft R hat inzwischen die Arbeit geleistet

$$\text{in } A: S R \cos \alpha, \text{ in } B: S_1 R \cos \alpha,$$

und die ganze Arbeit ist also $R(S \cos \alpha + S_1 \cos \alpha)$. Da man sich SS_1 sehr klein gegen TT_1 denken muß, so bleibt T nahe zu r , parallel, und man setze da, für $T_1 - T = \cos \alpha + S_1 \cos \alpha$. Daraus nimmt endlich die Arbeit von R die Gestalt an: $R(r_1 - r)$; und die Summe der Arbeiten der inneren Kräfte ist daher

$$W' = \sum R(r_1 - r).$$

Die Arbeit der inneren Kräfte ist also Null, wenn die Punkte ihre gegenwärtige Lage nicht geändert haben, wo dann überall $r = r_1$.

Wenn ein Punkt im Gleisgerüst sein soll, so muß bekanntlich die Pünne allen
 virtuellen Arbeiten für eine beliebige kleine Verschiebung verschwinden. Und
 daher muß auch für ein beliebiges Punkt-System dasselbe Prinzip so gelten,
daß für ein beliebiges System erlaubter Verschiebungen die Pünne sämtlicher
Arbeiten verschwindet. Wenn aber insbesondere diese Verschiebungen so gewählt
 werden, daß die gegenseitige Lage der Punkte, welche auf sich ruhe liegen, unver-
 ändert bleiben, allein unsere Kräfte wirken können, so muß verändert, so erfüllt
 man als Gleisgerüstbedingung nur, daß die Pünne aller Arbeiten der äußeren Kräfte
bei jeder erlaubten Verschiebung verschwinden muß. Aus dieser Form der
 Prinzip der virtuellen Verschiebungen kann man leicht die Gleisgerüst-
 bedingungen für einen festen Körper ableiten, indem man denselben zuerst parallel
 den Koordinatenachsen verschiebt, u. setzen ihn kleine Verschiebungen nur eine Augenmuths-
 theil. Wenn dagegen ein Punkt sich bewegt, so stellt die Arbeit zugleich die Differenz
 des selben (ganzen) lebendigen Kräfte dar, welche für den Anfangspunkt
 und den Endpunkt der Bewegung gelten. Also also ist in einem Punkt-
System die Pünne aller Arbeiten, welche in einem gewissen Zeitraum geleistet
werden, gleich dem Zuwachs, welcher die selben (ganzen) lebendige Kraft des
Systems, d. h. die Pünne der lebendigen Kräfte aller Punkte während
der Bewegung erfährt, d. h. ab zu

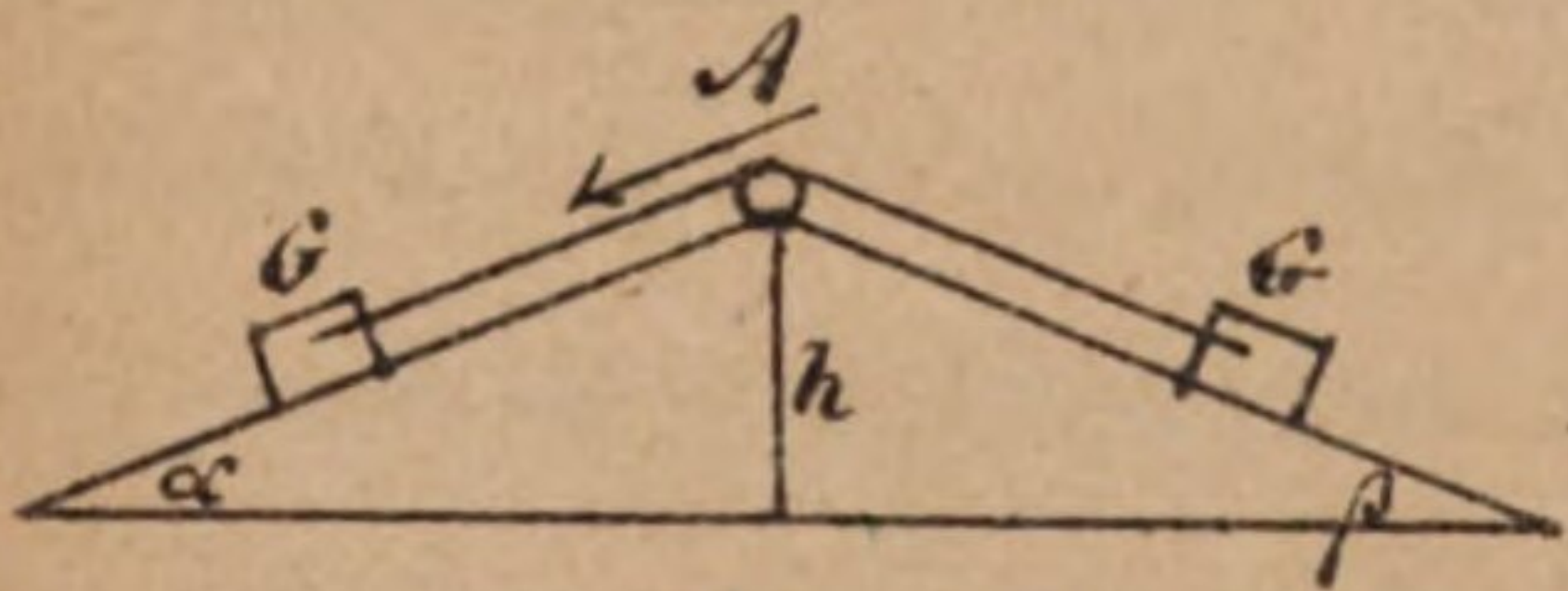
$$\delta \dots \sum \frac{G}{2g} (v^2 - v_0^2) = W + W'.$$

Wenn aber insbesondere an einem Punkt die beweglichen Punkte des
 Systems sich gegenseitige Lage verändern, so verschwindet W' , und daher ist der
Zuwachs der selben (ganzen) lebendigen Kraft gleich der Pünne aller
Arbeiten der äußeren Kräfte,

$$\gamma \dots \sum \frac{G}{2g} (v^2 - v_0^2) = W.$$

12.

Eine Anordnung hierzu bildet die Aufgabe, die gleichzeitige Bewegung zweier Massen Körper zu bestimmen, welche auf zwei vertikalten Pfosten stehen gleich den und durch ein Seil verbunden sind. In diesem Fall haben beide Körper in



in jedem ihrer Punkte dieselbe Geschwindigkeit hat, so wie daher ihre lebendige Kraft ausgedrückt wird $(m + m_1) v^2$. Ferner ist die Arbeit der äußeren Kräfte, wenn wir annehmen, daß die Körper in der

Richtung der Seile um s zurücklaufen haben: s

$(G \sin \alpha - G_1 \sin \beta)$; wobei das Gewicht des Seils vernachlässigt ist. Gleichmäßig die inneren Kräfte vernachlässigt werden, welche in A die Reibung u. die Reibung des Seils hervorufen. Es bleiben nur noch diejenigen inneren Kräfte übrig, welche durch die gegenseitige Wirkung der Gewichte in der Pfosten, hervor entstehen, die Reibung, welche durch $n G \cos \alpha$ und durch $n G_1 \cos \beta$ ausgedrückt ist. Nach mit Rücksicht auf die Richtung dieser Kräfte erhält man nach der Gleichung:

$$\frac{G + G_1}{2g} (v^2 - v_0^2) = s (G \sin \alpha - G_1 \sin \beta - n(G \cos \alpha + G_1 \cos \beta)), \text{ oder}$$

$$v^2 - v_0^2 = \frac{2gs}{G + G_1} \cdot \frac{G \sin(\alpha - r) - G_1 \sin(\beta + r)}{\cos r}.$$

Die Bewegung wird gleichförmig wenn $G \sin(\alpha - r) = G_1 \sin(\beta + r)$ und ist sonst entweder gleichförmig beschleunigt oder verzögert, indem

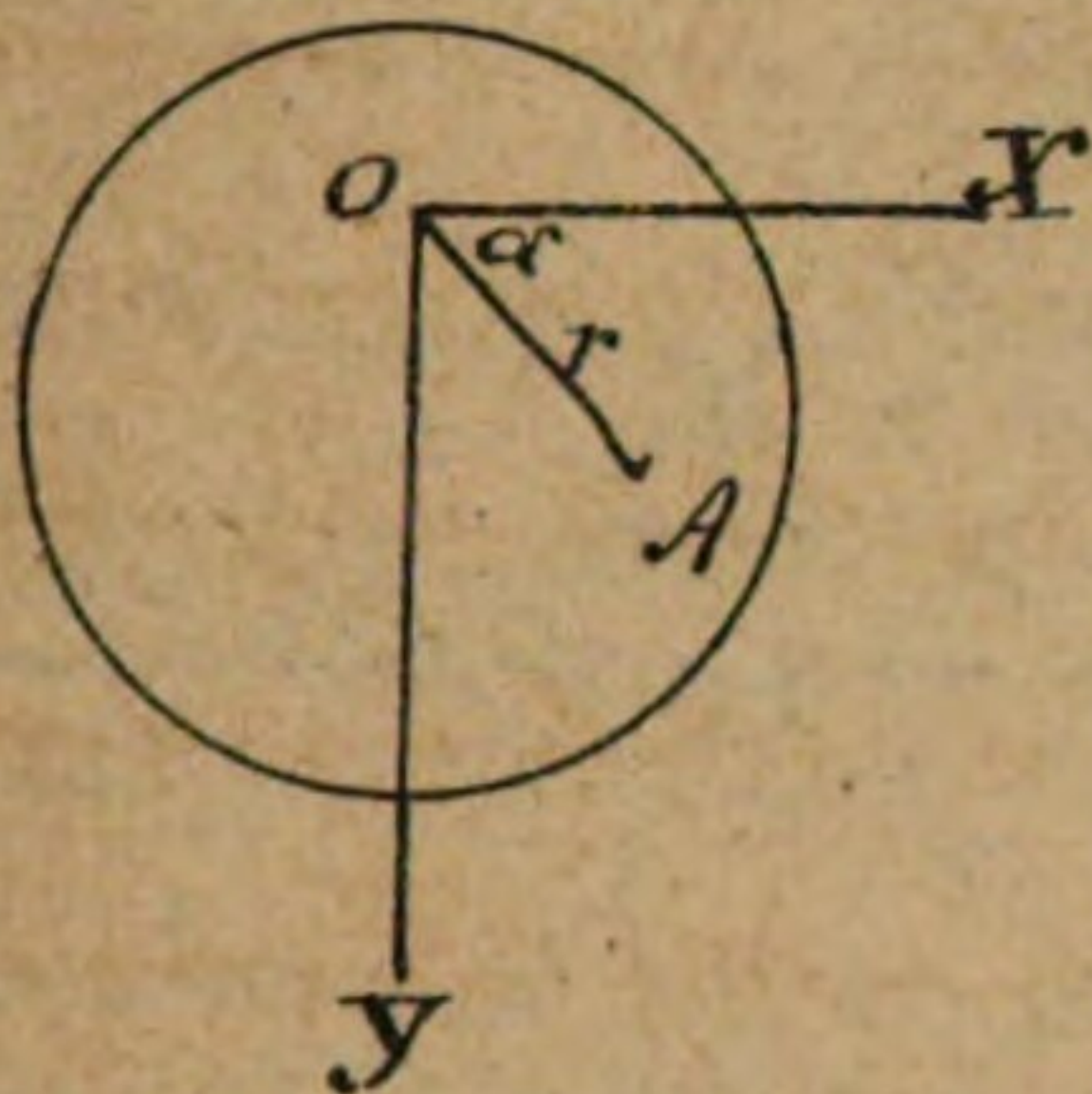
$$\frac{G \sin(\alpha - r) - G_1 \sin(\beta + r)}{(G + G_1) \cos r}$$

die Beschleunigung darstellt. Einen besonderen Fall hiervon gibt die Atwoodsche Fallmaschine.

P. 30. Bewegung eines Körpers um eine feste Axe.

Wenden wir aber die Gleichung der lebendigen Kraft jetzt in der Form an

auf die Bewegung eines Körpers um eine feste Axe. Zu O befindet sich ein
(die Z Axe) die Ebene der Bewegung. Ferner habe der

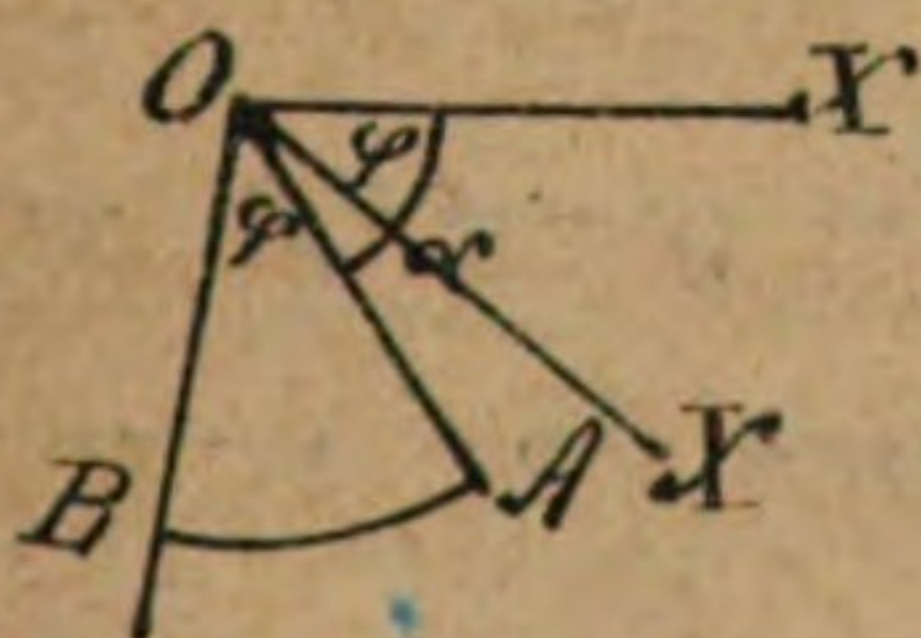


Körper in einem bestimmten Augenblicke ein Winkelge-
schwindigkeit w erfährt er im Anfang die Winkelge-
schwindigkeit w_0 setzt. Der Punkt A hat den offenbar die
Geschwindigkeit $w \cdot r = v$, und da w für alle Punkte des Kör-
pers den gleichen Werth hat, so nimmt die Gleichung
der lebendigen Kraft die Gestalt an:

$$w \dots (w^2 - w_0^2) \Sigma \frac{G r^2}{2g} = W,$$

wo W die Arbeit der äußeren Kräfte bezeichnet. Den Coefficienten $\Sigma \frac{G r^2}{2g}$
(oder $\Sigma \frac{G}{2g} r^2$), die Masse der Massen mit dem Quadrat der Entfernung von
der Drehungsaxe multiplicirt, nennt man das Trägheitsmoment für die
Axe O ; es ist constant während der ganzen Bewegung.

Um aber die Gleichung $10 \dots$ in einem bestimmten Fall vollständig darzustellen,
nehmen wir die Axe horizontal an u. die Pufferkraft als die einzig wirkende
Kraft. Der Körper wird dann ein zusammengesetztes Pendel. May der Körper tief



um einen Winkel φ gedreht haben, erfährt w_0 im Winkelsinn;
dann ist A nach B gerückt, u. es bildet jetzt OB mit OA gleich-
falls den Winkel φ . Wenn daher anfangs die Z Axe horizon-

tal war (so daß w_0 die in der Anfangslage mitgetheilte Anfangsgeschwindigkeit be-
trägt), so ist der Punkt A senkrecht um $r(\sin(\varphi + \alpha) - \sin \alpha)$; Die Ar-
beit der Pufferkraft in diesem Punkt ist also

$G r(\sin(\varphi + \alpha) - \sin \alpha)$, die Masse der pendelnden Arbeiten:

$$\sin \varphi \Sigma G r \cos \alpha + (\cos \varphi - 1) \Sigma G r \sin \alpha = \sin \varphi \Sigma G x + (\cos \varphi - 1) \Sigma G y.$$

Ist nun die Y Coordinate des Pufferpunkts Y , während die X Coordinate (für das

im Körper feste System) offenbar Null ist, da der Körper aus der Gleichgewichtslage ausgelenkt wurde, so hat man auch

$$W = -(1 - \cos \varphi) y, \quad \Sigma G = -2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cdot y, \quad \Sigma G.$$

Die Gleichung 10 geht also über in:

$$11. \dots (\pi^2 - \pi_0^2) \Sigma \frac{G r^2}{2g} = -2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cdot y, \quad \Sigma G.$$

Wäre man im Punkt verblieben, in der Aufhängerung von der Axe, so hätte man

$$(\pi^2 - \pi_0^2) \frac{G l^2}{2g} = -2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cdot l G.$$

Der Vergleich beider Formeln zeigt, daß der physikalische Pendel ausreicht, um ein einfaches Pendel, sobald das Verhältniß $\frac{\pi^2 - \pi_0^2}{2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$ in beiden Seiten gleichungen übereinstimmt, d. h. wenn

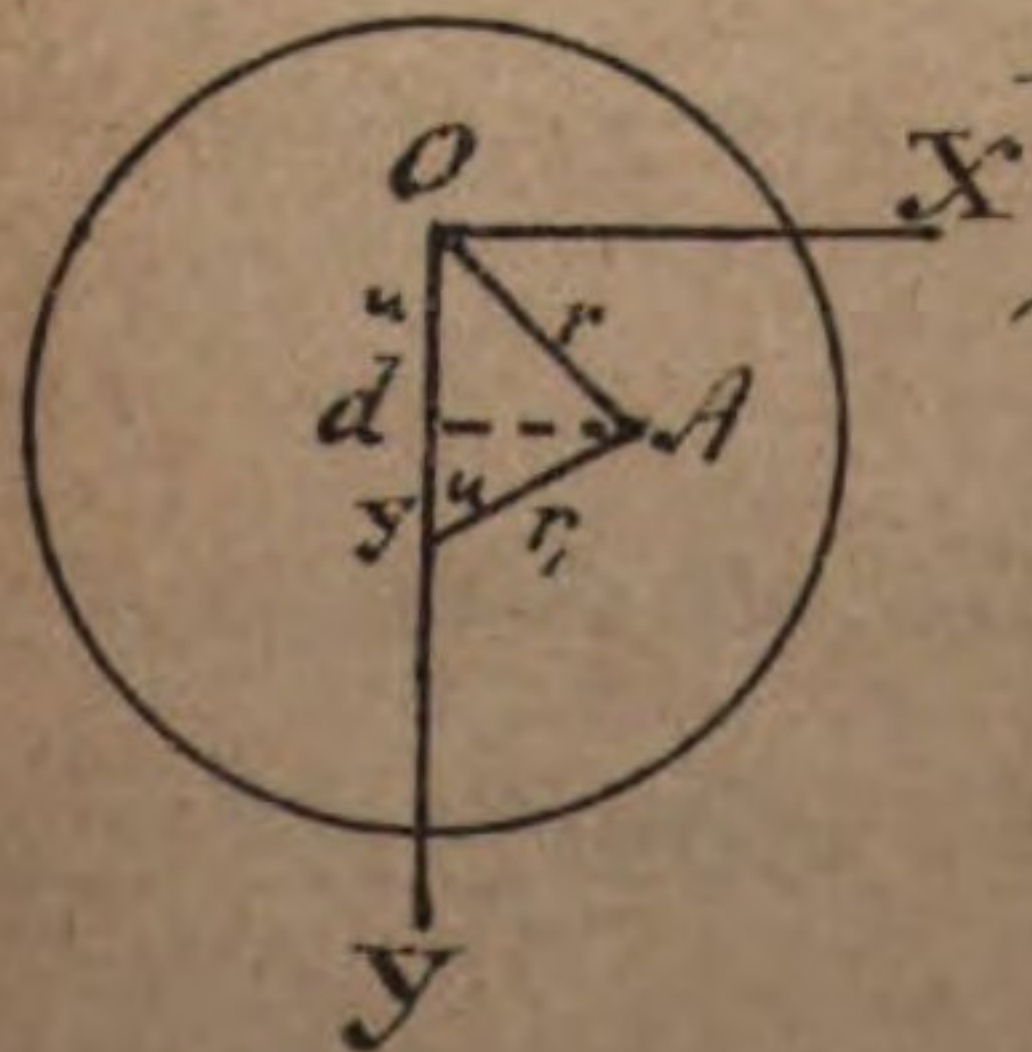
$$12. \dots \quad l = \frac{\Sigma G r^2}{y, \Sigma G}.$$

Man nennt l die Länge des einfachen Pendels, welche dem gegebenen Körper in der gegebenen Aufhängerung entspricht, u. Drehungspunkt einen Punkt, welcher in dem Körper um l von der Aufhängerung entfernt ist, u. dessen Verbindungslinie mit dem Drehpunkt auf der Aufhängerung senkrecht ist.

§. 31. Bestimmung einiger Trägheitsmomente.

Das Trägheitsmoment $\Sigma m r^2$ läßt sich für jede Axe leicht finden, sobald man es für eine parallele Axe kennt, welche durch den Schwerpunkt gelegt ist. Man hat also nur nöthig, die Trägheitsmomente für die letzte Art von

Axen zu berechnen. Um dies zu bewerkstelligen, legen wir durch den Schwerpunkt S eine Axe parallel der durch O gelegten. Dann ist



$$\Sigma m r^2 = \Sigma m (r_1^2 + d^2 - 2 r_1 d \cos u) = \Sigma m (r_1^2 + d^2 - 2 d x).$$

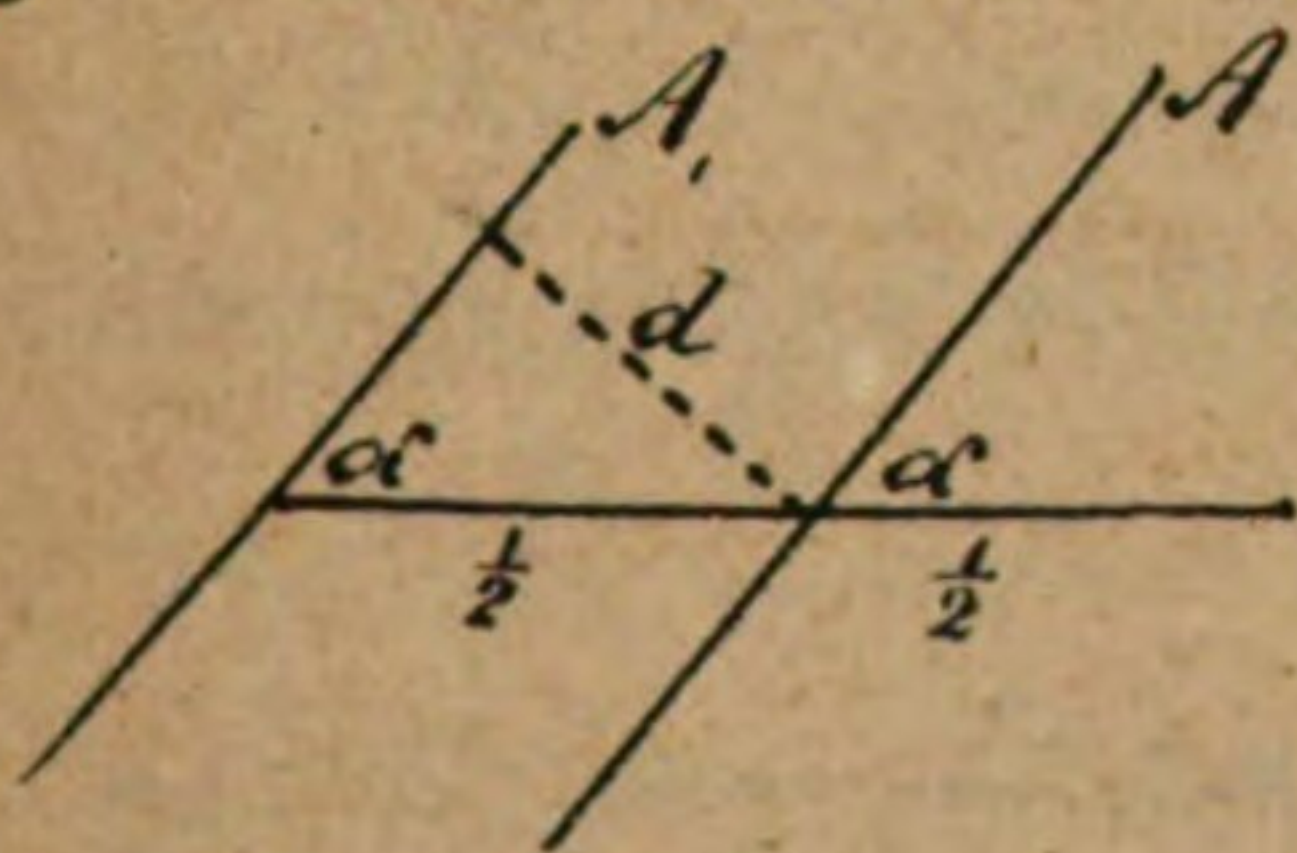
$$= \Sigma m r_1^2 + d^2 \Sigma m - 2 d \Sigma m x.$$

Man nehme aber $\Sigma m x$ vor sich, weil x der Abstand des Punktes A von einer durch den Flächenschwerpunkt gelegten Ebene ist, so wird endlich,

$$\Sigma m r^2 = \Sigma m r_1^2 + d^2 M,$$

wo M die ganze Masse des Körpers. Es sei man den Satz:

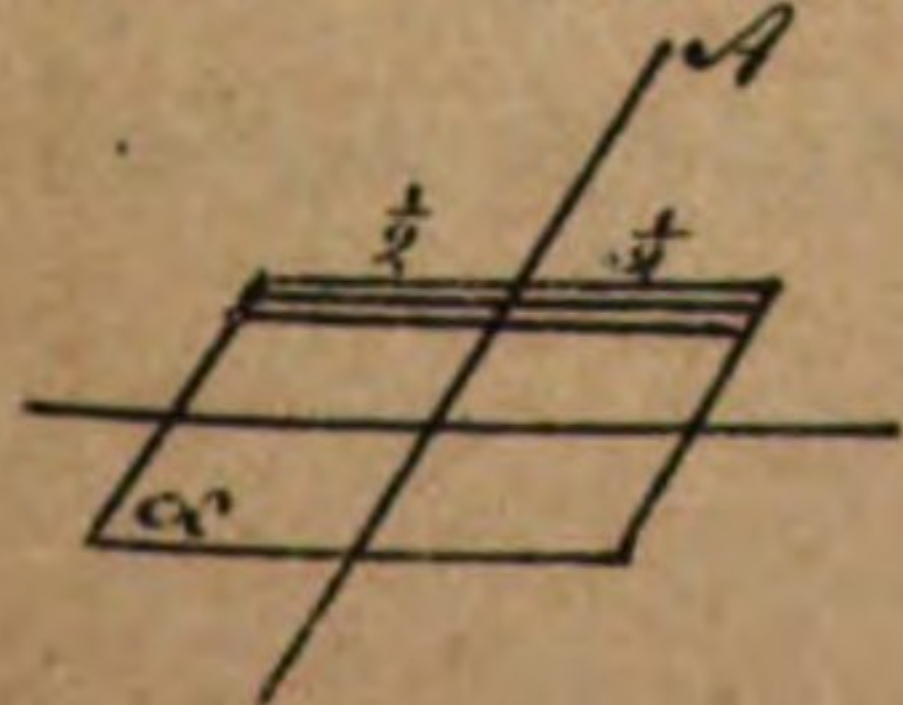
Wersucht man die Axe der Parallel, so daß sie aus dem Flächenschwerpunkt in einem Abstand, so daß das Trägheitsmoment um das Quadrat dieses Abstandes, zugleich mit der Masse des Körpers. Man pflegt nun auf den Teil $\Sigma m r_1^2$ die nämliche Form $M k^2$ zu geben, u. nennt k den Trägheitsradius, d. h. die Entfernung von der Achse, in welcher man die ganze Masse M concentrirt denken kann, damit das Trägheitsmoment den immerwährenden Werth behalte. In vielen Fällen genügt dieser Satz zur Bestimmung des Trägheitsmoments. So sei M das Trägheitsmoment eines dünnen Stabes für eine Axe, die durch seinen Flächenschwerpunkt geht, in dem Winkel α mit dem Stabe bildet. für eine parallele Axe die durch den Endpunkt geht ist also:



13. -- $M_1 = M + \frac{l^2 \sin^2 \alpha}{4} \cdot M.$

Nun ist aber M gleiches für beide Trägheitsmomente beiden Endpunkten, also doppelt so groß wie jedes. Jeder beiden für

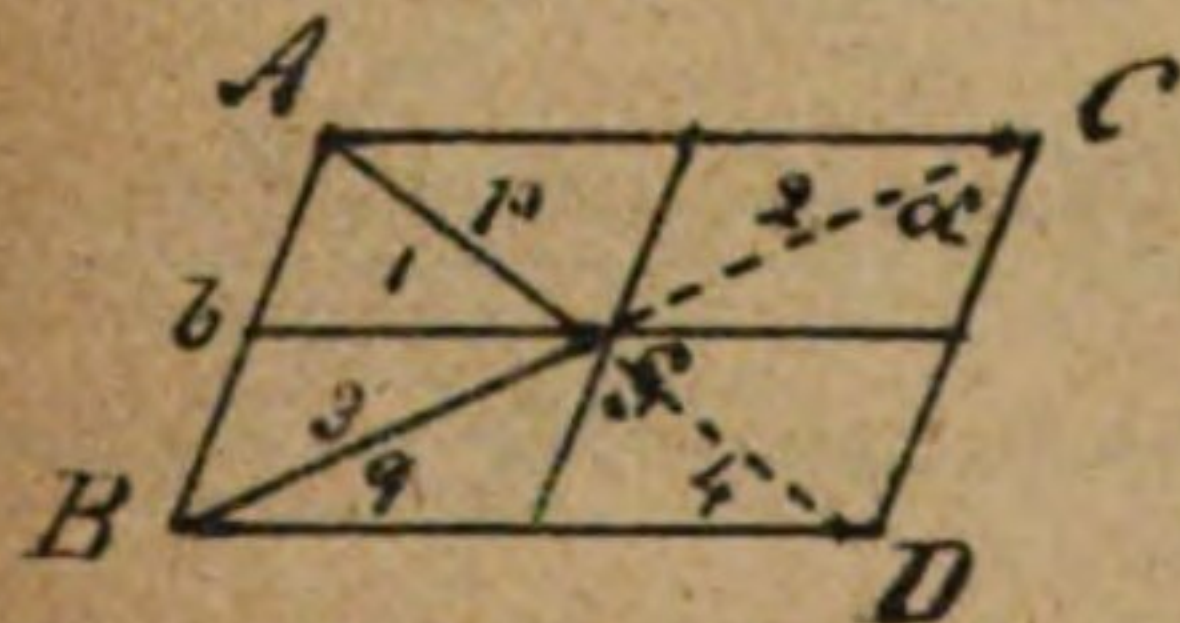
solches Stabes immer der doppelte Teil von M_1 ; den man zwei Male von gleichem Durchmesser vergrößern, lassen einen die doppelte Länge so erhalten, so daß man beide in gleich viel Stücke zerlegt denken; die Masse aufgetragenen Stücke in 8 Theile zerlegen, so daß man sie wie 1 zu 2, also die doppelte $m r^2$ wie 1 zu 8 und daher die ganzen Trägheitsmomente. Also ist



$$M + \frac{l^2 \sin^2 \alpha}{4} M = 8 \frac{M}{2} = 4 M, \text{ und } M = \frac{l^2 \sin^2 \alpha}{12} \cdot M.$$

Dieses Formel gilt auch für ein Parallelogramm, bestehend aus einer Axe A durch, welche immer parallel ist, so daß man

auf dasselbe in Hälften zerlegt, so hat jeder Halm daselbstträgheitsmoment und man hat daher nur die Masse dieses Halbes zu summieren. Ist also in der M die Masse des ganzen Pfeils, so wird ebenfalls $M = \frac{l^2 \sin^2 \alpha}{12} \cdot M$. Ist dagegen die Aze



auf der Ebene des Parallelogramms punktiert, so verläge man die Aze zunächst nach A und B. Das Trägheitsmoment für die Aze in A ist dann

$$M_1 = M + Mp^2, \text{ in B: } M_2 = M + Mq^2.$$

Für die Aze S aber ist, wegen der Äquivalenz der Figuren, das Trägheitsmoment des kleinen Parallelogramms 1 oder 4 gleich $\frac{M_1}{16}$, da sich die Größe Mr^2 für eine bestimmte Größe für eine 1 zu 16 verhalten, eben so für die Aze S das Trägheitsmoment von 2 oder 3 = $\frac{M_2}{16}$. Und so erhält man, da M auf eine bestimmte Trägheitsmomenten dieser vier Parallelogramme zusammengelegt:

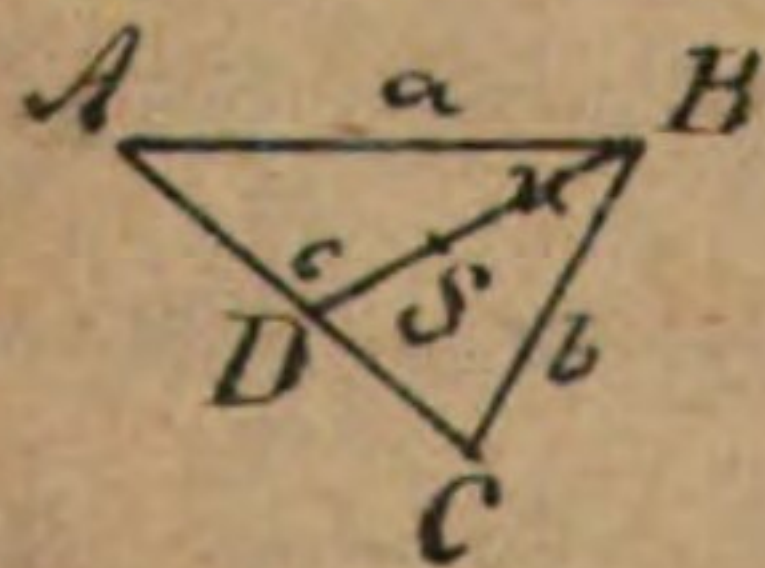
$$2 \frac{M_1 + M_2}{16} = M = \frac{M}{4} + \frac{M(p^2 + q^2)}{8}, \text{ woraus } M = \frac{M(p^2 + q^2)}{6}.$$

Es kommt nach einer kleinen ACD, CDB folgt

$$4p^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha, \quad 4q^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha, \quad 2(p^2 + q^2) = a^2 + b^2 \text{ so ist endlich}$$

$$M = \frac{M(a^2 + b^2)}{12}$$

hieraus findet sich aus dem Trägheitsmoment eines Dreiecks für eine Aze, welche gegen die Basis verläuft punktiert gelegt ist. Ist die Aze durch die Mitte D der Basis AC, so ist das Moment die Hälfte von 2; da aber auf gleiche die Masse auch halb so groß wird wie in 2 so bleibt die Formel



unverändert. Verlegt man die Aze in den Schwerpunkt S, so hat man $M \cdot (DS)^2 = \frac{M}{36} (a^2 + b^2 + ab \cos \alpha)$ abgelesen; und bemerkt man, dass $ab \cos \alpha = a^2 + b^2 - c^2$ so erhält

man für die durch den Schwerpunkt gefundene Aze

$$15 \quad M = \frac{M(a^2 + b^2 + c^2)}{36}$$

Weslegt man die Ape in die Ecke B, so ist nach $M(S.B)^2$ fuzuzufügen, es
wird dann $M = \frac{M}{12} (3a^2 + 3b^2 - c^2)$

Es ist bekanntes das Dreieck gleichförmig, $a = b$, so wird $M = \frac{M}{12} (6a^2 - c^2)$.



Diese Formel ist auf ein regelmäßiges n -Eck anwendbar, wenn
die Ape durch den Mittelpunkt geht, so man setzt man die Massen
aller Dreiecke, in welche dasselbe zerfällt, zu einander, so findet man,

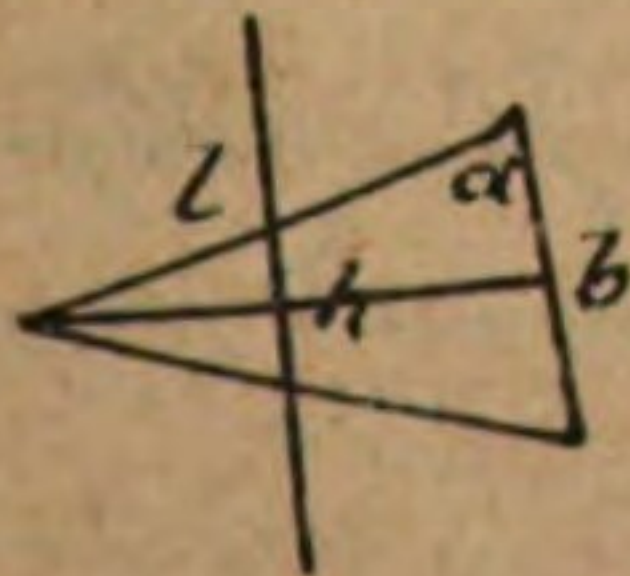
da das Product $6a^2 - c^2$ für jedes Dreieck derselbe ist

$$16 \quad M = \frac{M}{12} (6a^2 - c^2)$$

so man M die Masse des ganzen Polygons bezieht. Wird dasselbe ein
Kreis, so ist $c = 0$, also, wenn a der Radius des Kreises ist:

$$17 \quad M = \frac{Ma^2}{2}$$

Diese Formel gilt auch für einen Kreissegment, wenn M dessen Masse bedeutet,
da das Trägheitsmoment selbstverständlich auffindbar zu sein. Das Dreieck von der Bogen
des Kreissegments zur Kreishöhe zerfällt, also man die Masse des Kreissegments zur Masse des
Kreises. Die Formeln 2 bis 6 gelten ebenfalls auch auf alle Kreissegmente der Kugeln,
welche sich auftragen gegen die Ape die betrachtet werden können als Kreissegmente gegen n parallel
zu den Flächen und geschnitten sind, so, welche sich um ihre Trägheitsmomente der Kreise
Die Formel 1 gilt auch, da sie für ein Parallelogramm gilt, dessen eine Seite
dessen Sehnenlänge einer Seite parallel, durch die Mitte der Höhe geht, so es
wird nur durch Halbierung des Parallelogramms gleichförmig das Trägheitsmoment in die



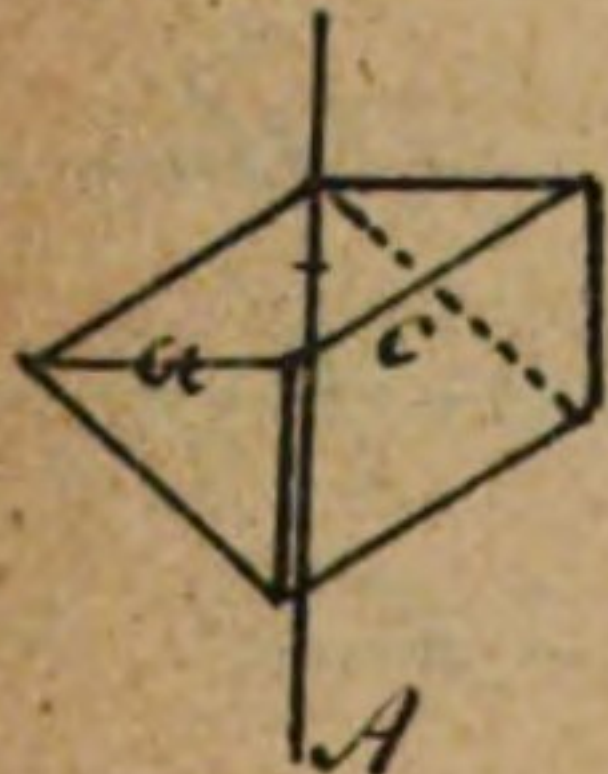
Masse selbst. Bezeichnet man die Höhe mit h , so wird $\sin \alpha = \frac{h}{l}$, also das

Trägheitsmoment $\frac{Mh^2}{12}$. Setzt die Ape durch den Schwerpunkt, so ist

man nur $\frac{Mh^2}{36}$ abzugreifen, so es bleibt $\frac{Mh^2}{12}$, legt man dagegen die Ape in die

Part 6, so ist $\frac{Mh^2}{9}$ zu setzen u. man hat $\frac{Mh^2}{6}$. Für ein verformbares
 Parallelogramm, dessen Seiten a & b sind, findet sich aus 2, für drei Axen, welche den
 Ecken parallel durch den Schwerpunkt gelegt sind, die Dreifachmomente

$$\frac{M(b^2 + c^2)}{12}, \quad \frac{M(c^2 + a^2)}{12}, \quad \frac{M(a^2 + b^2)}{12}.$$

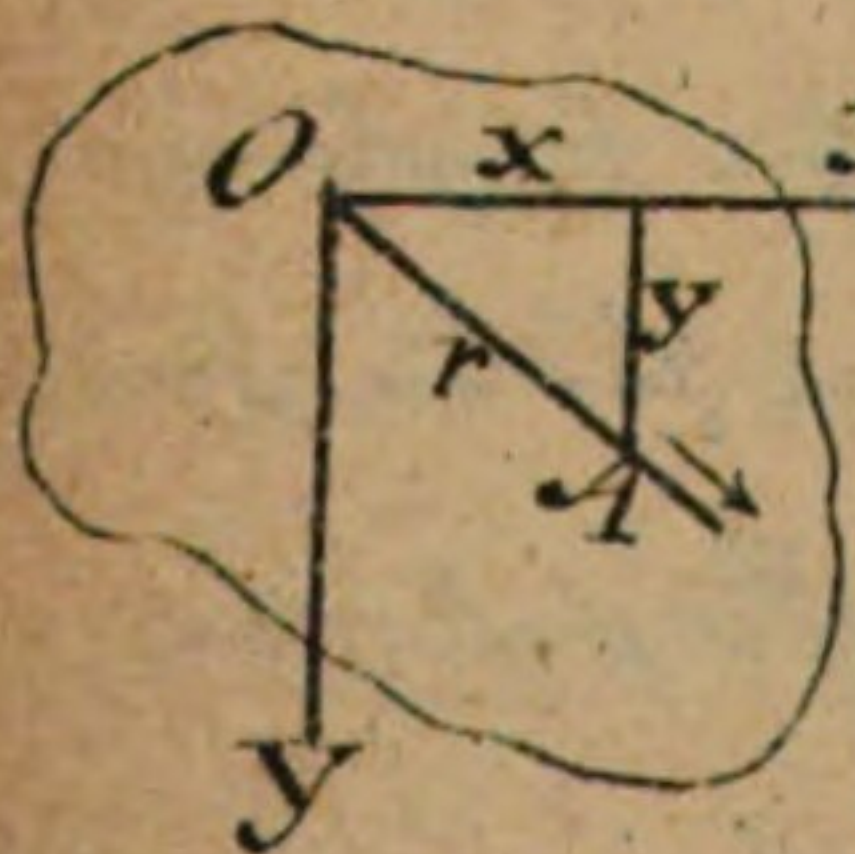


Setzt man das Parallelogramm in zwei verformbar dreieckige Theile, so ist wieder für jedes Theilchen die Masse u. das Dreifachmoment
 gleich. Zu der bestimmten Figur ist also das Moment für die Axe A ,
 welche durch die Mitte der Seite ac und parallel mit bc geht, gleich $\frac{M(a^2 + c^2)}{12}$.

Verlegt man die Axe nach dem Schwerpunkt, so ist $\frac{Ma^2}{36}$ abzunehmen u. legt
 man sie dann in die Mitte der Seite bc , so ist $\frac{Ma^2}{9}$ hinzuzufügen, so daß man
 erhält $\frac{M(2a^2 + c^2)}{12}$. Die weitere Bestimmung der Dreifachmomente geschieht derartigeselben
 u.

§. 32. Druck gegen die Axe, welcher durch die Bewegung entsteht.

Für rotirende Körper gilt im Allgemeinen gegen die Drehungsaxe ein Druck
 und, welches davon hervorgeht, daß in jedem Theile eine Centrifugalkraft
 entsteht, und daß alle diese Centrifugalkräfte sich nach unten ganz besondern
 Richtungen genau richtig verhalten. Denken wir uns das Coordinatensystem in



dem Körper fest, die Z Axe als Drehungsaxe. Denkt sich der Körper
 augenblicklich mit der Winkelgeschwindigkeit ω , so entsteht der Druck
 in dem Punkte A , dessen Coordinaten x & y sind eine Centrifugalkraft
 $\frac{G}{g} \omega^2 r$, also senkrecht zur Z Axe zu entfernen besteht ist.

Dieser Druck hat die Componenten $\frac{G}{g} \omega^2 x$ und $\frac{G}{g} \omega^2 y$ in Richtung der x & y Axen, weil
 sonst die Componente Null ist. Gisthingefallen wir für den ganzen Körper
 die folgenden Gesamtsammanden

$$A = \omega^2 \sum \frac{G}{g} x \quad B = \omega^2 \sum \frac{G}{g} y \quad C = 0,$$

und die Punkte der beiden Momente in Bezug auf die Coordinatenachsen
werden folgende: $A' = r^2 \sum \frac{G}{g} xy$ $B' = r^2 \sum \frac{G}{g} xx$ $C' = 0$,
Aus diesen Gleichungen sieht man, daß durch die Einwirkungskraft keine Bewegung
in der Richtung der Drehungsaxe entsteht in einem Kräftepaar, welches die Bewegung
um dieselben Beschleunigungen bewirkt. Ein Körper also, welcher sich um eine feste Achse
bewegt, in welchem Kräftepaar untersuchen ist, nicht auf einer und auch unter Winkel-
geschwindigkeit bewegen. Gegeben wird im Allgemeinen eine resultierende Kraft
in ein resultierendes Paar zerfallen sein, welche besteht aus, welche aus der Lage zu
hängen, in welche die Richtung der Bewegung um die Achse nicht vollkommen befestigt ist.
Wenn man sich die resultierenden Einwirkungskräfte der Achse können leicht erkennen soll,
so ist es also nach dem Obigen erforderlich, daß

$$\sum \frac{G}{g} x = 0 \quad \sum \frac{G}{g} y = 0 \quad \sum \frac{G}{g} xy = 0 \quad \sum \frac{G}{g} xx = 0.$$

Es sehen hier die letzten Gleichungen zeigen an, daß die Drehungsaxe durch den
Schwerpunkt gehen muß, die letzten beiden aber sind nur durch eine bestimmte Richtung
der Achse erfüllbar. Man kann zeigen, daß es kein gegen einander wirkendes Kräftepaar
gibt, welche durch den Schwerpunkt gehen. Wenn jede dieser Bedingungen erfüllt. Man
nennt sie freie Achse, weil sie keinen Einwirkungsmomente zu erzeugen haben,
weil also auch, wenn sie frei sind, den Körper, selbst es bewegen soll, sich um eine dieser
Achsen zu drehen, wie von selbst zu einer anderen Achse übergehen wird.

Außerdem gibt es aber für jeden Punkt des Körpers drei gegen einander wirkende
Kräftepaare, für welche die Gleichungen $\sum \frac{G}{g} xy = 0$ und $\sum \frac{G}{g} xx = 0$ erfüllt sind. Man
nennt diese Gangachsen des Körpers für diesen Punkt. Die Gangachsen des Schwerpunktes
sind die freien Achsen. Die Gangachsen für jeden Punkt aber haben die Eigenschaft, daß die
Drehungsaxe einem Kräftepaar zu widerstehen soll, sondern eine resultierende Kraft davon

Complementen A B steht, u. welche in dem Punkte angesetzt, für welchen die Bewegung
 der Bewegung ist. Punct die Constanten des Bewegungspunktes x, y , so ist offenbar

$$A = \pi x, \quad \Sigma \frac{a}{y} \quad B = \pi y, \quad \Sigma \frac{a}{x},$$

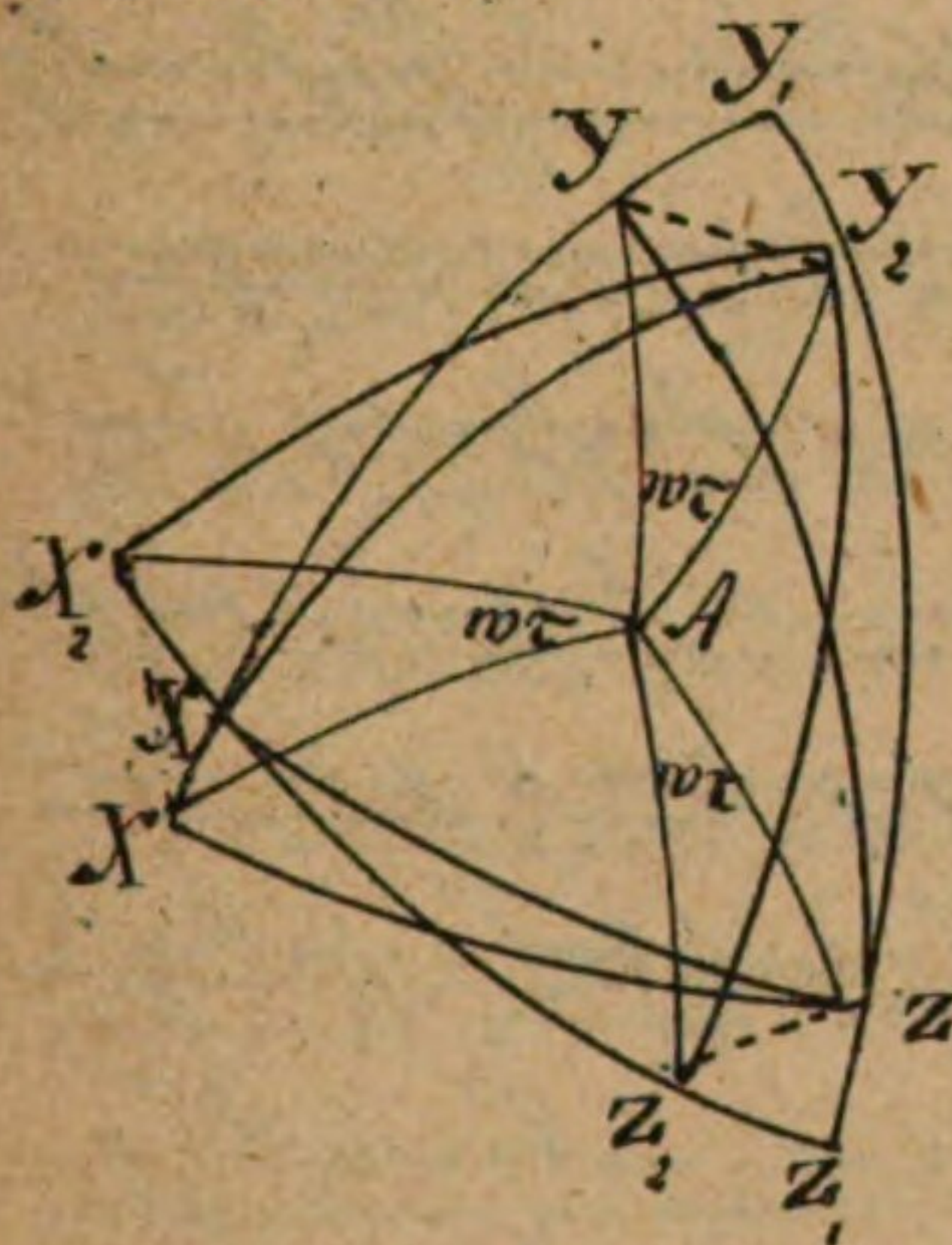
d.h. die Richtungslinie der Kraft erfüllt man, wenn man von dem Punkte im Luftfall
 auf die tiefsten Bewegungspunkt, parallel der Bewegungslinie, eine Gerade
 über der der Bewegungspunkt des Bewegungspunktes, wenn man sich in ihrer die Masse der
 ganzen Bewegung konstant ist. In der tiefen Kraft in dem gegebenen Punkte an-
 gesetzt, so wird die Bewegungslinie auf der die der Einfluss bleiben, behalt diesen Punkt
 fest ist. Diese ist also im Körper, wenn man diesen Punkt in der anfänglichen Bewegung
 eine Bewegung, so bleibt diese auf Bewegungslinie für alle Zeit, behalt
 nicht in der Bewegungslinie der Lage der der Bewegung.

Diese Verhältnisse vereinigen sich in dem Körper in Rotationen
 ist. Das Ergebnis für den Bewegungspunkt mehr als 3 Bewegungen, eine derselben ist offenbar
 die geometrische Lage des Körpers, für welche die übrigen Punkte der Bewegungslinie
 verfahren. Aber auf jede beliebige Linie wird Bewegungslinie, welche durch den Bewegung-
 punkt geht u. gegen die geometrische Lage senkrecht ist. Ist der Körper im Ruhezustand,
 so wird jede Lage eine feste Lage, welche durch den Mittelpunkt geführt wird.

D. 33. Drehung um einen festen Punkt

Wenn der Körper nur in einem Punkte befestigt ist u. seine anfängliche Bewegungslinie
 nicht zufällig eine Gerade für diesen Punkt ist, so muss sich im Allgemeinen durch
 die kleine Rotation der Bewegungslinie u. die Lage der Bewegungslinie im Körper festgesetzt
 werden, wenn auf keine Weise einwirken. Um aber die Lage der Bewegungslinie
 für jeden Augenblick zu bestimmen, kann man sich die Bewegung nur die augenblickliche
 Bewegungslinie vorzustellen denken, durch die gleichzeitig in der Bewegungslinie, welche

und die Hauptaxe aufgeführt werden. Es gibt nämlich überflüssig der Satz: Jede
 Drehung um eine beliebig gewählte Axe kann ersetzt werden durch drei Drehungen um
 drei gegen einander senkrechte bestimmte Axa. Denken wir uns, um die zu gehen, den
 festen Punkt als Mittelpunkt einer Kugel; in A befindet sich die ursprüngliche Drehungsaxe
 der Kugel; in x, y, z seien die Fußpunkte der im Körper festen Hauptachsen.
 Wenn nun der Körper auf eine die Axe A mit der Winkelgeschwindigkeit ω drehet, so be-
 trifft jeder fester Punkt in der kleinen Zeit t den kleinen Bogen ωt . Lassen wir aber statt dessen



den Körper drehen mit der Winkelgeschwindigkeit τ in kleine
 Drehung τt um die Axe Z ausführen, so wird x nach x_1, y nach y_1 .
 Hat nun der Körper mit der Winkelgeschwindigkeit p um die
 x Axe gedreht, welche jetzt die Kugel in x trifft so wird
 y_1 nach y_2, z_1 nach z_2 . Läßt man endlich um z_2 mit der
 Winkelgeschwindigkeit q , so wird x_1 nach x_2, y_1 nach y_2 . Diese
 drei Drehungen kann man nun so bestimmen, daß die

letzte Lage eben die ist, welche der Körper durch die kleine Drehung ωt um die Axe A
 erreicht annimmt. Betrachten wir z. B. das kleine Dreieck z, z_2, z_1 , welche wegen der Klein-
 heit der Drehungen als ein ebenes rechtwinkliges betrachtet werden kann. Die Seite z, z_2

$$p = q t, z, z_2 = p t, \text{ also}$$

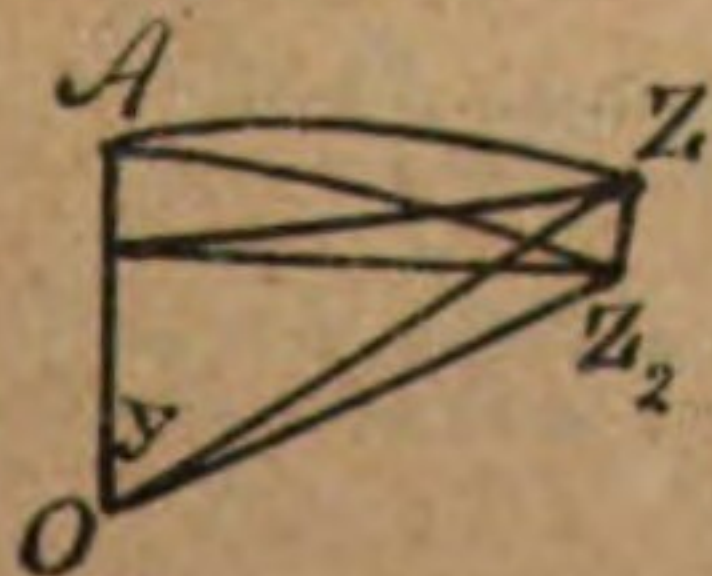
$$(z, z_2)^2 = (p^2 + q^2) t^2.$$

Es aber y der Winkel zwischen der Axe A gegen die Z Axe bildet, so kann man zugleich
 z, z_2 als einen kleinen Kreisbogen ansehen, der mit dem Radius $\sin y$ beschrieben
 ist. In dessen Zentrum Winkel ωt . Es ist auch $(z, z_2) = \omega t \sin y$, man set also die Gleichungen

$$\omega^2 \sin^2 y = p^2 + q^2 \quad \text{flaus}$$

$$18 - - - \omega^2 \sin^2 \beta = \tau^2 + p^2$$

$$\omega^2 \sin^2 \alpha = q^2 + \tau^2.$$



22.

Wird man diese Gleichungen u. bemerkt, daß

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1, \text{ also } \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2, \text{ so kann man:}$$

19 --- $w^2 = p^2 + q^2 + r^2$, u. kann man man die Gleichungen 1. der Reihe nach von dieser Gleichung abzieht.

$$20 --- p = w \cos \alpha, q = w \cos \beta, r = w \cos \gamma.$$

Diese Gleichungen ergeben aber die folgenden Sätze:

Jede Winkelgesamtheit läßt sich nach drei vorgezeichneten Augen, welche in dem betrachteten Körper fest sind, ablesen, u. es ist eine selbstverständliche Selbstverständlichkeit, indem man die Winkelgesamtheit auf der Zeichnungsbasis eingetragenen Punkt, u. sie auf die festen Augen projiziert. Daß sich im Körper gleichzeitig mit drei mit ihm fest verbundenen Augen mit gewissen Winkelgesamtheiten, u. daß man sich auf den Augen an u. bildet aus ihnen ein Parallelpolyeder, u. gibt die Lage desselben in jedem der vorgezeichneten Winkelgesamtheiten u. die Richtung der augenblicklichen Zeichnungsbasis. Man kann sich auch eine Vorstellung von der Bewegung bilden, welche im Körper um einen festen Punkt geschieht, indem dieselbe in drei Vorlesungen u. die Hauptachse zerlegt. Jede dieser Vorlesungen wird bestimmt durch ein Elementartheil des Körpers, u. von der Endlage des Körpers augenblicklichen Zeichnungsbasis geschieht u. außerdem durch die Lage des Körpers. Vermöge dieser Bestimmung ändert sich fortwährend das Verhältniß der drei Winkelgesamtheiten u. wird die Lage der Zeichnungsbasis im Körper fortwährend als ein Punkt. Alle aufeinander folgenden Zeichnungsbasis bilden im Körper fortwährend als ein Punkt einen Kreis von allgemeinem Charakter, dessen Mittelpunkt in demselben Punkte liegt, u. man die Bewegung des Körpers sich als eine Drehung denken, daß der im Körper feste Punkt sich in vollkommener Bewegung auf dem im Räume festen Kreis bewegt.

§. 34. Allgemeine Bewegung eines Körpers.

Jede beliebige Bewegung eines Körpers können wir zerlegen in eine, allen Punkten gemeinsame fortwährende Bewegung, welche so beschaffen ist, daß sie die Bewegung eines Punktes im Körper nicht verleiht; in eine relative Bewegung, welche, da der gewählte Punkt relativ im Körper sein muß, in ihm selbst auftreten kann, als in einer Bewegung um diesen Punkt. Um diese letztere Bewegung dann zu untersuchen, müssen wir allen Punkten des Körpers gegen die entgegengesetzten zu denjenigen Bewegungen mittheilen, welche der gewählte Punkt nicht verleiht; indem wir diese allen Punkten gemeinsamen Bewegungen den wirklichen hinzufügen, bleibt jener Punkt im Körper, in der letzteren Bewegung fortwährend in sich selbst ruhen, welche der Körper um diesen Punkt nicht verleiht. Da die hinzugefügten Bewegungen aber im Ruhe sein sollen, allen Punkten des Körpers gleiche Bewegungen, d. h. Parallelbewegungen zu theilen, so müssen diese Bewegungen auf einem System von Parallelen aufgetragen werden, welche in den entsprechenden Punkten des Systems angesetzt, in welchen den Massen ihren Angriffspunkte geographisch sind. Für ein solches System abstrahieren wir eine einzige Resultante setzen, welche im Systempunkte ansetzt. Hiermit geht hervor, daß man die relative Bewegung trotz bloßer Hinzufügung einer im Systempunkte angestrichenen Kraft darstellen kann, welche der Masse des ganzen Körpers geographisch ist, und dieselbe, in diesem Punkte ansetzt, die entgegengesetzte Bewegung zu erzeugen vermag, welche der als Centrum der relativen Bewegung betrachtete Punkt nicht verleiht.

Hiermit folgt ferner aber, daß wenn man den Systempunkt selbst zum Centrum der relativen Bewegung wählt, diese Bewegung ganz ohne Hinzufügung neuer Kräfte

ausgeführt werden kann. Und es ergibt sich der Satz:

Die Bewegung eines Körpers läßt sich zerlegen in eine allen Punkten gemeinsame resultierende Bewegung u. in eine gleichzeitige Bewegung um den Fixpunkt, welche denselbe ausgeführt wird, als wenn der Fixpunkt ruhe u. fest wäre.

Betrachten wir nun das System der äusseren Kräfte, welche auf den Körper wirken. Die resultierende Kraft zerlegen wir in den Fixpunkt, die Bewegung um den Fixpunkt wird also dann nur unter dem Einfluß der resultierenden Kräftepaars ausgeführt; die resultierende Kraft aber wird jetzt einfach genau aufgeführt durch die gemeinsame resultierende Bewegung, welche wir jetzt schon haben; sie muß also hier sich allein im Punkte sein, genau diese Bewegung hervorzurufen. Wirkt also also diese Kraft im Fixpunkte, (oder in einer äquivalenten) so würde sie eine Bewegung eintreten. Das ganze Körper würde sich aber dann so bewegen, wie sich im Betrachteten Fall der Fixpunkt wirklich bewegt; also mit anderen Worten:

Der Fixpunkt bewegt sich so, als wenn in ihm alle Masse des Körpers vereinigt wäre und als ob zugleich alle Kräfte des Systems in ihm angegriffen.

Obwiewohl zugleich folgt, daß, wenn keine äusseren Kräfte vorhanden sind, der Fixpunkt sich gleichförmig u. geradlinig bewegen muß.

Es sei nun bemerkt, daß, da der Fixpunkt bei der resultierenden Bewegung, als fest angesehen werden kann, die resultierende Kraft, welche in ihm angreift, bei der Betrachtung der resultierenden Bewegung ebenso gut festgehalten als angewandt werden darf. Im ersten Fall wirkt nur die resultierende Kraft, im zweiten das ganze gegebene Kräftesystem, was für den nachstehenden Fall die gleiche Wirkung hervorbringt. Manken wir diese Ausführungen auf das Princip der lebendigen Kraft an.

Wir können den kleinen Körper, den ein Punkt des Körpers zum Mittelpunkt, vorstellen denken sich zwei gleichzeitig wirkende Kräfte, deren einer S der resultierenden

Bewegung des Krügers angeführt, rückt der Punkt, S , der Kräftepunkt entgegen, bildet sich in diesem Punkt angreifende Kraft mit beiden Hebeln die Winkel α und α_1 , so ist die bei der fortgesetzten Bewegung die Arbeit $PS \cos \alpha$, bei der Kräftepunkt $PS \cos \alpha_1$. Die beiden Arbeiten haben S gemein für alle Punkte in die von der fortgesetzten Bewegung herührende Gesamtarbeit ist also in dem betrachteten Augenblicke $S \Sigma P \cos \alpha$, was gleich der Arbeit der Kräfte P ist. Da sich also der Kräftepunkt unter dem Einfluß dieser Kräfte allein bewegt, so ist der Gewinn an lebendiger Kraft des Kräftepunktes, wenn man sich in ihm die Masse des Krügers concentrirt denkt, gleich der Summe der Arbeiten der fortgesetzten Bewegung.

Da ferner die Bewegung um den Kräftepunkt so beschaffen ist, als wäre dieser fest, in der dann die Kräfte P nur die Arbeiten $PS \cos \alpha$, thun würden, so folgt, daß die lebendige Kraft der Bewegung gleich der Summe dieser Arbeiten sein muß. Also ist auch der Gewinn an lebendiger Kraft der Bewegung gleich der Summe aller Arbeiten der fortgesetzten Bewegung.

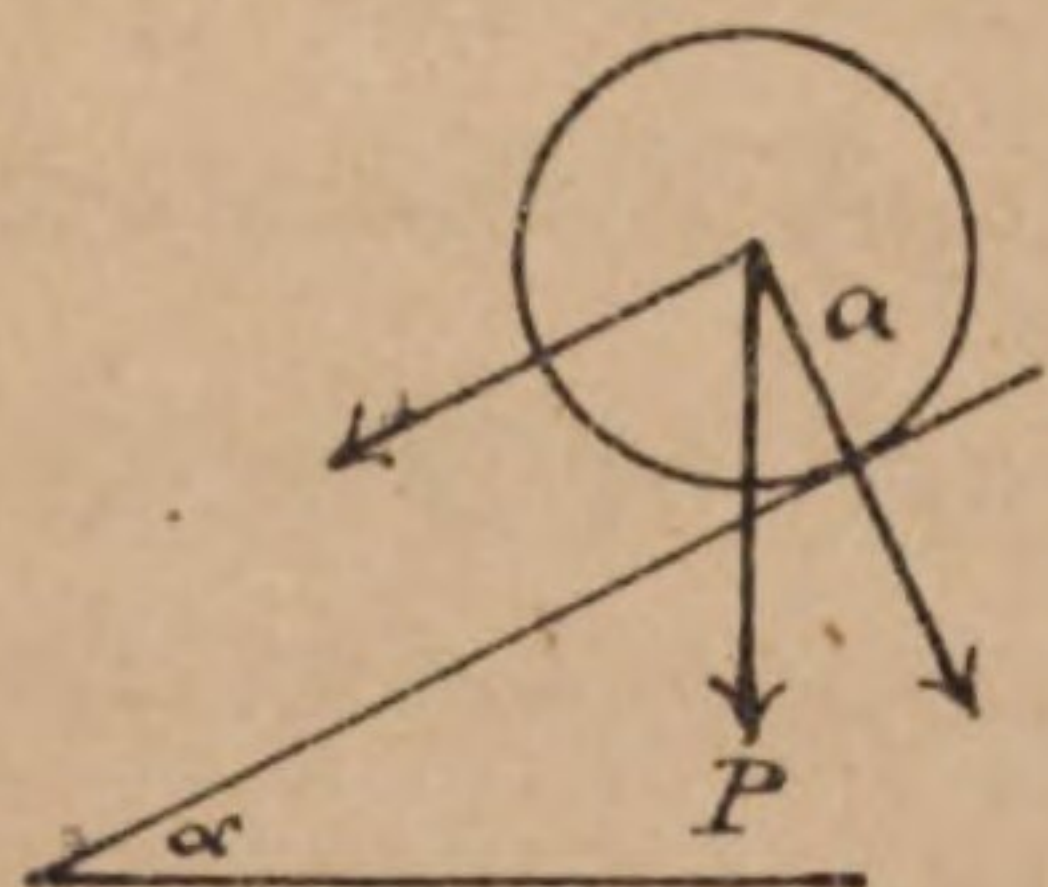
Da ferner die Summe aller Arbeiten gleich der Summe aller lebendigen Kräfte sein muß, so folgt endlich der Satz:

Die lebendige Kraft eines Krügers ist gleich der Summe der lebendigen Kräfte des Kräftepunktes, alle Masse in diesem concentrirt gedacht, in der lebendigen Kraft der Bewegung um den Kräftepunkt.

Bezeichnen wir also durch v die Geschwindigkeit des Kräftepunktes, durch v_0 die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit, durch P das Gewicht des Krügers, durch E und D die Arbeiten der fortgesetzten in derselben Bewegung, so ist:

$$21 \quad - \quad - \quad - \quad \frac{P}{2g} (v^2 - v_0^2) = E \quad v^2 \Sigma \frac{Ar^2}{2g} - 10^2 \Sigma \frac{Ar_0^2}{2g} = D.$$

Wenn wir uns auf die Aufgabe an, die Bewegung eines Zylinders zu bestimmen, welcher eine schiefe Ebene hinabrollt. Hierbei sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem der Zylinder zugleich gleitet, oder nur rollt, indem sein Berührungspunkt mit der schiefen Ebene stets die Gleitfähigkeit nicht besitzt. Im ersten Fall wirkt die volle Kraft der Reibung $= n P \cos \alpha$, die Resultate aller Kräfte in Bezug auf die feststehende Bewegung ist



also, wenn der Zylinderpunkt die Punkte zurückgelegt hat:

$$F = SP (\sin \alpha - n \cos \alpha).$$

Setzt man aber den Zylinderpunkt fest, so wirkt bei der Bewegung die Reibung positiv bestimmend, und ist Arbeit ist, wenn der Körper sich um den Winkel φ gedreht hat:

$$D = n a S P \cos \alpha.$$

Da zugleich rotationsmoment des Zylinders durch $M \cdot \frac{a^2}{2}$ ausgedrückt ist, so findet sich aus den Gleichungen 21, unter der Voraussetzung, daß anfangs keine Gleitbewegungen vorhanden waren:

$$v^2 = 2gs(\sin \alpha - n \cos \alpha), \quad \omega^2 = \frac{4ng \cos \alpha}{a} \varphi.$$

Die erste dieser Gleichungen stellt eine gleichförmig beschleunigte Bewegung dar, deren Beschleunigung $g(\sin \alpha - n \cos \alpha)$; ist daher wenn der Weg s zurückgelegt wurde, die Zeit t verfließen, so ist auch

$$v = g(\sin \alpha - n \cos \alpha) \cdot t \quad s = \frac{1}{2} g(\sin \alpha - n \cos \alpha) t^2$$

Stets stellt die zweite Gleichung die gleichförmig beschleunigte Bewegung eines Punktes dar, der in der Entfernung t von der Axe sich auf einem Kreise bewegt. Man hat daher auch

$$\omega = \frac{2ng \cos \alpha}{a} \cdot t \quad \varphi = \frac{ng \cos \alpha}{a} t^2$$

beachten wir aber, daß es in der Natur der Bewegung liegt, daß der Bewegungspunkt nicht aufrecht stehen kann, weil die Reibung nie vollständig Bewegung setzen zu lassen im Stande ist. Hier also in diesen Formeln $v = a \sin \alpha$, selbst die vertikale Geschwindigkeit der Bewegungspunktes der Kugel, negativ, so werden die Formeln unrichtig. Dies läßt sich vermeiden, indem man $\sin \alpha < 3 \pi \cos \alpha$.

Immer noch ist den Beschleunigungen, in der Bewegung nach vorn, so daß die Geschwindigkeit der Bewegungspunktes immer Null ist, so ist $v = a \sin \alpha$. Zugleich ist es klar, daß die horizontale Geschwindigkeit Null ist, in der Bewegung der kugelförmigen Kugel geht dann über in $\frac{G}{2g} v^2 + \frac{G a^2}{4g} \sin^2 \alpha = \frac{3G}{4g} v^2 = G s \sin \alpha$, $v^2 = \frac{2}{3} \cdot 2gs \sin \alpha$. Die Geschwindigkeit verhält sich zu der mit der Reibung gleichenden der Kugel wie $\sqrt{\frac{2}{3}} : 1$.

N. 35. Von Momentenkräften.

Leben wir mit einer Kraft, welche sehr kurz Zeit dauert, so einen nicht speziellen Punkt erreicht, aber groß genug ist, insofern diese Zeit die Geschwindigkeit kaum merklich zu erhöhen. Ist diese Zeit sehr kurz, so wird man die Größe nicht mehr bestimmen können, so daß, welche die Geschwindigkeit verändert, nur für periodische Wirkung angibt, bei der Messung entzogen. Man wird daher die Größe der Momentenkräfte durch die Geschwindigkeit vorübergehen lassen, welche sie erzeugt, aus dem unbekannten Längen herausbringen. Ist die Geschwindigkeit v , die Masse des Punktes, auf welchen die Momentenkräfte wirkt m , so ist $m \cdot v$ das Maß der Momentenkräfte. Man sieht ohne weiteres, daß die Geschwindigkeit insofern die Geschwindigkeit der Momentenkräfte, die Geschwindigkeit wie die der Punkte in der Geschwindigkeit der Punkte zu verstehen.

unb. Nur wenn man keine gleichzeitigen Einwirkungen behauptet auf einem festen Körper festzulegen darf man sich nicht auf ein erfüllendes Gesetz in ein erfüllendes Gesetz aufgeben, nach den oben aufgestellten Regeln. Dies führt zur Bestimmung der anfänglichen Bewegung, welche ein Körper unter dem gleichzeitigen Einfluß mehrerer Momente erleidet. Die Eigenschaften, die man bei dieser Bestimmung voraussetzt, sind, da sie während der ganzen Zeit, in welcher die Momente einwirkend sind, in einer bestimmten Richtung fortwähren. Bezeichnen wir durch $u, u_2, \dots$ Momente, deren Richtungen durch die Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ gegeben sind, in welche zerlegt werden kann, wenn man angegeben ist, x, y, z , etc. seien die Coordinaten des Angriffspunktes. Die ganze Wirkung des Systems hängt dann offenbar nur von den folgenden sechs Größen ab, welche den eben durch $ABT, A'B'T'$ bezeichneten Größen entsprechen:

$$A = \sum u \cos \alpha$$

$$A' = \sum u (y \cos \gamma - z \cos \beta)$$

$$B = \sum u \cos \beta$$

$$B' = \sum u (z \cos \alpha - x \cos \gamma)$$

$$T = \sum u \cos \gamma$$

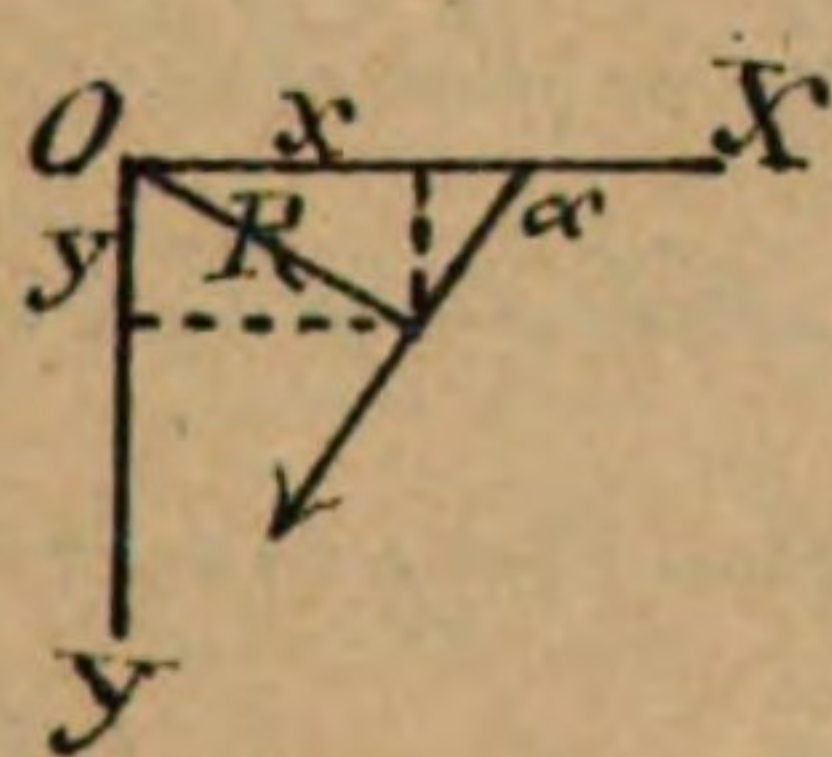
$$T' = \sum u (x \cos \beta - y \cos \alpha)$$

Wirken diese zugleich auf einen einzigen Punkt, so sind auch die Componenten ABT von Null verschieden; ist m die Masse des Punktes, so wird seine Anfangsgeschwindigkeit gegeben durch

$$v = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 + T^2}}{m}$$

erkennt die Richtung derselben durch die Lage des des ABT gebildeten Vectors. Analoges bestimmt sich. Wirken die Kräfte auf einen festen Körper, so mag dieser zunächst nur von einer Seite ABT , die ABT der z , beweglich sein. Wollen wir den Angriffspunkt der resultirenden Resultante, deren Componenten ABT sind, in einen Punkt der ABT , so muß diese zugleich diese Resultante (Wirkungslinie) sein; so wird also auch auf diese Kräfte $A'B'$ eingegriffen, deren

Agon gegen die Drehungsbezugspunktschwerpunkt, in welche die äußere Lage zu demselben
beachtet wird. Endlich also wird das Kräftepaar I' dazu dienen, den Körper um
anfängliche Winkelgeschwindigkeit mitzutheilen. Sei die w , dieselbe muss
leicht zu berechnen, wenn in jedem Punkt eine Momentenwirkung wirkt, welche der
Masse des angewandten Punktes in seiner Entfernung R von der Agon proportional
wird, in der That gegen die Drehungsbezugspunktschwerpunkt R wirkt. Ein solches P
kann man so jedem Punkt die nämliche Winkelgeschwindigkeit w zu theilen
beachtet wird, welche dann auf der Körper angemessen, der sich in der Lage ABT , $A'BT'$
befindet in dieser Fall die Kraft K und d aufzusuchen, welche man sofort
wenn man in $t, \mu = w m R$ und $\cos \alpha = -\frac{x}{R}$, $\cos \beta = \frac{x}{R}$, $\cos \gamma = 0$ setzt, d. h.



die sich in der Lage:

$$-w \sum m y \quad -w \sum m x x$$

$$w \sum m x \quad -w \sum m x y$$

$$0 \quad w \sum m R^2$$

Demnach wird sich das System für die in Rede stehende Drehung denselben Effekt
wie das gegebene Kräftepaar, es ist uns nötig, dass

$$I' = w \sum m R^2, \text{ also } w = \frac{I'}{\sum m R^2} \text{ d. h.}$$

die Winkelgeschwindigkeit ist gleich dem Quotienten der in Bezug auf die Drehungs-

bezugspunkte der Kräftepaare, d. h. der Kräftepaare, d. h. der Kräftepaare, d. h. der Kräftepaare.

Setzen wir uns in der Lage den Fall eines einzigen Kräftepaars, welche in einem
Punkt der Y-Agon angewandt wird, punktschwerpunkt, dann gegen die
Drehungsbezugspunktschwerpunkt, dann $\cos \alpha = -1$, $\cos \beta = 0$, $\cos \gamma = 0$. in die Gleichungen 1. gesehen
wird in:

$$A = -u \quad B = 0 \quad I = 0 \quad A' = 0 \quad B' = 0 \quad I' = u y$$

Die resultierende Winkelgeschwindigkeit ist also $w = \frac{u y}{\sum m R^2}$. Man kann aber
die Frage stellen, wie der Körper beschaffen sein muss, damit die Drehungsbezugspunkte

keinen anderen Punkt zu setzen, als den, welcher die Drehung
tatsächlich ausgeht. Man muß die Punkte 22 mit den vorher
gegebenen gleichsetzen, d. h. man muß haben

$$\sum m y = u \quad \sum m x = 0 \quad \sum m x x = 0 \quad \sum m x y = 0 \quad \sum m R^2 = u y.$$

Dies zeigt, daß die Drehungsaxe für den Aufangspunkt im Hauptpunkt muß,
d. h. für den Mittelpunkt des Lot's, welcher von dem Aufangspunkt des Körpers
auf die Axe gefällt wird, in dem Lot'spunkt in der Ebene liegen muß, wel-
che durch dieses Lot in die Drehungsaxe gelegt wird. Endlich muß noch
 $y = \frac{\sum m R^2}{\sum m y}$ sein; d. h. der Aufangspunkt muß von der Axe abhängen und
nicht sein, wie der Drehungspunkt, welcher entsteht, wenn man die Drehungs-
axe horizontal stellt u. die Schwerkraft auf den Körper wirken läßt.

Den gesuchten Punkt, welcher durch für jede Drehungsaxe vollständig bestimmt
ist, nennt man den Mittelpunkt des Körpers. Bezeichnen wir den Trägheitsmoment
durch K , durch L die Entfernung des Drehungspunktes von der Axe, so wird dann
 $\sum m R^2 = M(K^2 + L^2)$, $\sum m y = M L$, also $y = L + \frac{K^2}{L}$.

Die oben angestellten Betrachtungen haben eine Anwendung bei dem sogenannten
Kathetischen Pendel. Ein Kugel trifft auf einen Träger, der sich um eine
horizontale Axe drehen kann, und der sich um die v. h. M des Masses, so
weit das Moment des Körpers m v. h. r , ist die Winkelgeschwindigkeit des ge-
schlagenen Punktes von der Drehungsaxe, so ist das Drehungsmoment des Körpers m v. h.
Winkel, wenn M das Trägheitsmoment des Pendels, ist die anfängliche Winkel-
geschwindigkeit $\omega_0 = \frac{m v r}{M}$. Es sei nun die Gleichung der lebendigen
Kraft die Gleichung annehmen

$$M(\omega^2 - \omega_0^2) = -4g M L \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

so findet man für den Knüpfelwinkel, wo $\omega = 0$ ist:

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{w \cdot 2 M}{4g M L}} = \frac{w \sqrt{h}}{2\sqrt{g M L}}$$

Daß man umgekehrt bei bekanntem Anschlagwinkel die Geschwindigkeit berechnen kann, wird nachher die Kugel best. Zeit erreicht. - Es stellt sich heraus, die Anfangsbeschleunigung eines Körperes zu bestimmen, welche nur in einem einzigen Punkte fest ist. Aber in diesem Fall die anfängliche Beschleunigung zu ermitteln, kann man sich durch das System von Punkten drei gleichzeitige Verschiebungen ausgesetzt denken, mit den Winkelgeschwindigkeiten p, q, r , welche nur die 3 Hauptachsen des Coordinatensystems bestimmen. Bildet man dann für alle 3 die Ausdrücke, welche den Geschwindigkeiten entsprechen, so erhält man als Resultate, welche diese Verschiebungen hervorrufen könnten:

$$\text{für die } x \text{ Achse: } p \sum m(y^2 + z^2) - q \sum mxy - r \sum mxz$$

$$\text{für die } y \text{ Achse: } -p \sum mxy + q \sum m(x^2 + z^2) - r \sum myz$$

$$\text{für die } z \text{ Achse: } -p \sum mxz - q \sum myz + r \sum m(x^2 + y^2)$$

Damit also diese Verschiebungen p, q, r durch das gegebene Kräftesystem hervorgerufen werden können, müssen diese Ausdrücke gleich A', B', I' sein. Will man aber das System der Hauptachsen des festen Punktes zu Coordinatenachsen, so werden diese Gleichungen einfacher:

$$A' = p \sum m(y^2 + z^2) \quad B' = q \sum m(x^2 + z^2) \quad I' = r \sum m(x^2 + y^2),$$

$$\text{oder es ist} \quad p = \frac{A'}{\sum m(y^2 + z^2)} \quad q = \frac{B'}{\sum m(x^2 + z^2)} \quad r = \frac{I'}{\sum m(x^2 + y^2)}$$

Zeigen wir also die Winkelgeschwindigkeit durch w , und die Winkel der Verschiebung gegen die Hauptachsen durch α, β, γ , so ist

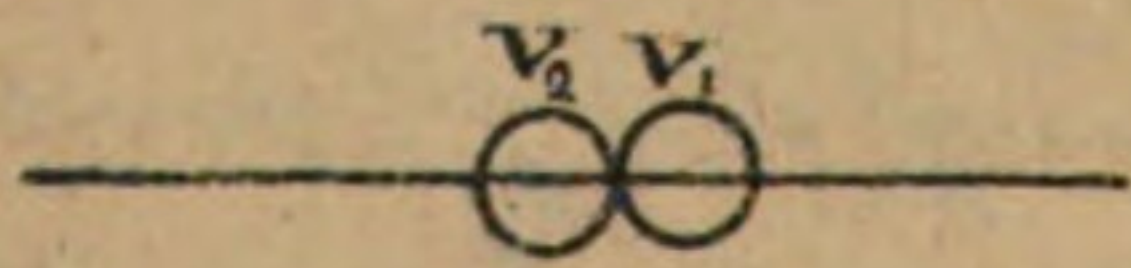
$$w \cos \alpha = \frac{A'}{\sum m(y^2 + z^2)} \quad w \cos \beta = \frac{B'}{\sum m(x^2 + z^2)} \quad w \cos \gamma = \frac{I'}{\sum m(x^2 + y^2)}$$

Man kann zeigen, daß auch, wenn die Resultate alle Punkte gegen eine bestimmte Richtung wirken, diese Richtung immer noch im Allgemeinen die

Der Fall ist, wenn sie zugleich mit der Kollision einer
 Kugel zusammenfällt. — Es wäre endlich der Fall zu betrachten, wenn ein
 ganz frei beweglicher Körper einem System von Kugeln unterworfen
 würde. Zuerst kann man sich die Betrachtungen wiederholen, welche oben
 auf die freie Bewegung eines Körpers angewendet sind; u. man findet den
 selbsten Punkt des Körpers seine Bewegung so beginnt, als ob seine
 Kugel Kugeln in ihm zerstückt wären, u. zugleich die Masse des ganzen
 Körpers in ihm vereinigt gewesen wäre; u. daß der Körper seine
 Bewegung nur den Punkt so beginnt, als wenn er aus dem
 Punkt des Körpers so beginnt, als wenn er aus dem
 Punkt des Körpers so beginnt, als wenn er aus dem

§. 36. Zusammenstoß zweier Körper.

Stellen wir uns zwei harte Kugeln, welche mit den Geschwin-
 digkeiten v_1 und v_2 auf in der Richtung ihrer Entzerrung ge-
 rade hin kommen. Zuerst sie zusammenstoßen, wird sich
 ihre Geschwindigkeit entzerrt und die Kugeln werden
 eine gemeinsame Geschwindigkeit v annehmen. Hierbei sind
 also die Geschwindigkeiten $v_2 - v$ und $v_1 - v$ verloren gegangen. Die erste
 Kugel muß also auf dem Obigen auf sie gewirkt mit einem Moment $m_2(v_2 - v)$



$$m_2(v_2 - v)$$

die zweite auf die erste mit $m_1(v_1 - v)$ gewirkt haben. Da diese auf
 Richtung und Gegenrichtung fortgesetzten Kräfte gleiches entzerrt
 gesetzte Richtung sein müssen, so wird ihre Summe Null d. h.

$$m_1(v_1 - v) + m_2(v_2 - v) = 0 \quad v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

Will man die resultierende Geschwindigkeit für Kugeln finden, welche auf einander entgegengekehrt kommen, so ist nur eine der Geschwindigkeiten negativ anzunehmen. Die lebendige Kraft wird durch den Stoß immer vermindert, also auch die Größe der Arbeit, welche die Kugeln auf dem Stoß zu leisten vermögen. Denn es ist die lebendige Kraft nach dem Stoß:

$$(m_1 + m_2) v^2 = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 - \frac{(m_1 + m_2)(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) - (m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{m_1 + m_2}$$

$$= m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 - \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2,$$

also der Verlust an lebendiger Kraft dem Quadrat der Geschwindigkeit Differenz proportional ist. Deshalb die verlorenen Geschwindigkeiten die Kugeln erlangen

$$v_1 = v_1 - v = \frac{m_2(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}, \quad v_2 = v_2 - v = \frac{m_1(v_2 - v_1)}{m_1 + m_2}$$

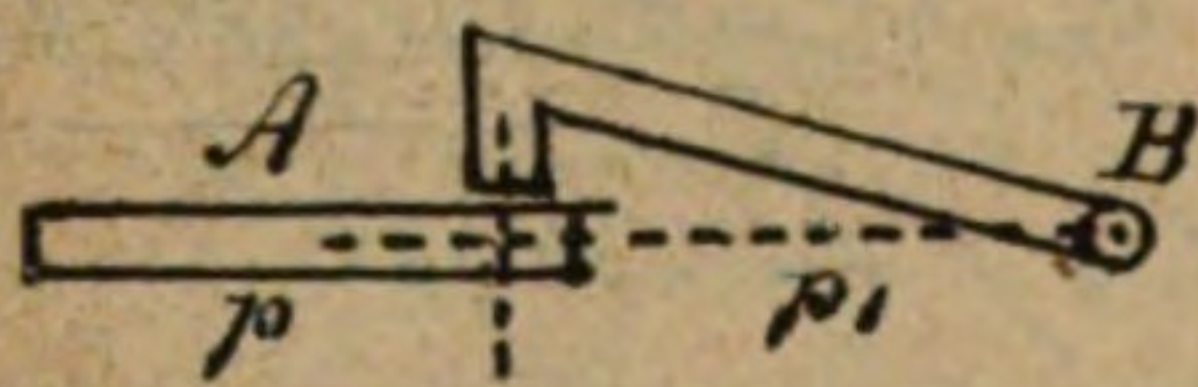
so ist auch $\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2 = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2$, d. f.

die verloren lebendige Kraft ist gleich der lebendigen Kraft, welche die verlorenen Geschwindigkeiten entspricht.

Die Richtung der Kugeln nach dem Stoß, welche zwei beliebig zusammenstehende Kugeln durch den Stoß erfahren, ist im Stoßpunkte dieselbe. Sie zerlegen sich in Geschwindigkeiten der Berührungspunkte nach der Tangente u. Normale der Berührungshellen, so werden die tangentialen Geschwindigkeiten ohne Einfluss auf einander bleiben; dagegen werden die normalen Richtung, gleich u. entgegengesetzte Momente Kräfte entstehen, deren Richtung nach den früher gegebenen Formeln bestimmt ist; und deren Größe bestimmt ist, daß die Normalgeschwindigkeiten der Berührungspunkte einander gleich werden müssen.

Hieraus ist im Allgemeinen nur eine Bestimmung der Richtung u. Größe der Geschwindigkeiten, sondern auch eine Bestimmung der Geschwindigkeit.

der Körper vor sich gehen, behält nicht die Richtung der Momentenkräfte durch die Schwerpunkt beider Körper fortwährend. Haben wir z. B. nun die Augen A. B



zweier Körper, von denen B sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω dreht, während es den ruhenden Körper A trifft.

In Körper A wirken nach dem Satz der Winkelgeschwindigkeiten ω ω_1 an, in Körper B, damit die Winkelgeschwindigkeit der beiden Punkte gleich sei, $\omega p = \omega_1 p_1$. Ist ferner P die eintretende Momentenkräfte, in M M_1 , die Trägheitsmomente, so ist nach folgender gegebenen Formeln, da diese Kräfte den Körpern die Drehungsgeschwindigkeiten ω und ω_1 - W mittheilen muß:

$Pp = M\omega - Pp_1 = M_1(\omega_1 - W)$, also $P(p^2 M_1 + p_1^2 M) = M M_1 p_1 W$, und man hat endlich das Resultat:

$$\omega = \frac{M_1 p p_1 W}{M_1 p^2 + M p_1^2} \quad \omega_1 = \frac{M_1 p^2 W}{M_1 p^2 + M p_1^2}$$

Die tangentialen Tangenten der Geschwindigkeiten mittelwärtig kann man eine Betrachtung auf die Drehung, welche in Folge des Stoßes, während des Stoßes, sich ebenfalls als Momentenkräfte ergibt. Da sie in jedem Augenblicke dem normalen Stoß proportional ist, d. h. dem Stoß, welchen der Stoß verursacht, so ist auch ihre Gesamtwirkung der Gesamtwirkung des Stoßes proportional, so lange die Körper während des Stoßes nur an einem Punkt gleich auf einander zu stoßen; in ist dann P die Momentenkräfte, welche beiden Körpern wirkt, so kann man durch P die Momentenkräfte der Drehung bezeichnen, welche jedem der Berührungspunkte eine veränderte Tangentialgeschwindigkeit zu theilen bestrebt ist.

Dieses Verhältniß ändert sich, wenn man die Körper als elastisch betrachtet. In diesem Falle kann man annehmen, daß die Körper zurück, indem sie sich

zusammen sinken, dieselben Geschwindigkeit beibehalten, wie unelastische Körper; aber während die starren Körper oben mit den verlangten Geschwindigkeiten weiter gehen, setzen sich die elastischen weiter aus, u. indem sie die Zustände der Zusammenstöße in umgekehrter Reihenfolge wiederholt noch einmal durchlaufen, erlangen sie noch einmal dieselben Geschwindigkeiten beibehalten. Die eben betrachteten beiden Körper werden selbst, wenn sie will. können elastisch waren nach dem Stoß die Geschwindigkeiten erlangen:

$$u_1 = v_1 - 2(v_1 - v) = 2v - v_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2}$$

$$u_2 = v_2 - 2(v_2 - v) = 2v - v_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}$$

Aus die Gleichungen folgt zugleich

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = 2(m_1 + m_2)v - (m_1 v_1 + m_2 v_2) = m_1 v_2 + m_2 v_1$$

d. h. die Summe der Momentenkräfte, welche den Körpern ihre Geschwindigkeiten mitgetheilt im Kande sind, bleibt unverändert, und geradeaus

$$m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 = 4(m_1 + m_2)v^2 - 4v(m_1 v_1 + m_2 v_2) + m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2$$

d. h. die lebendige Kraft wird durch den Stoß nicht geändert.

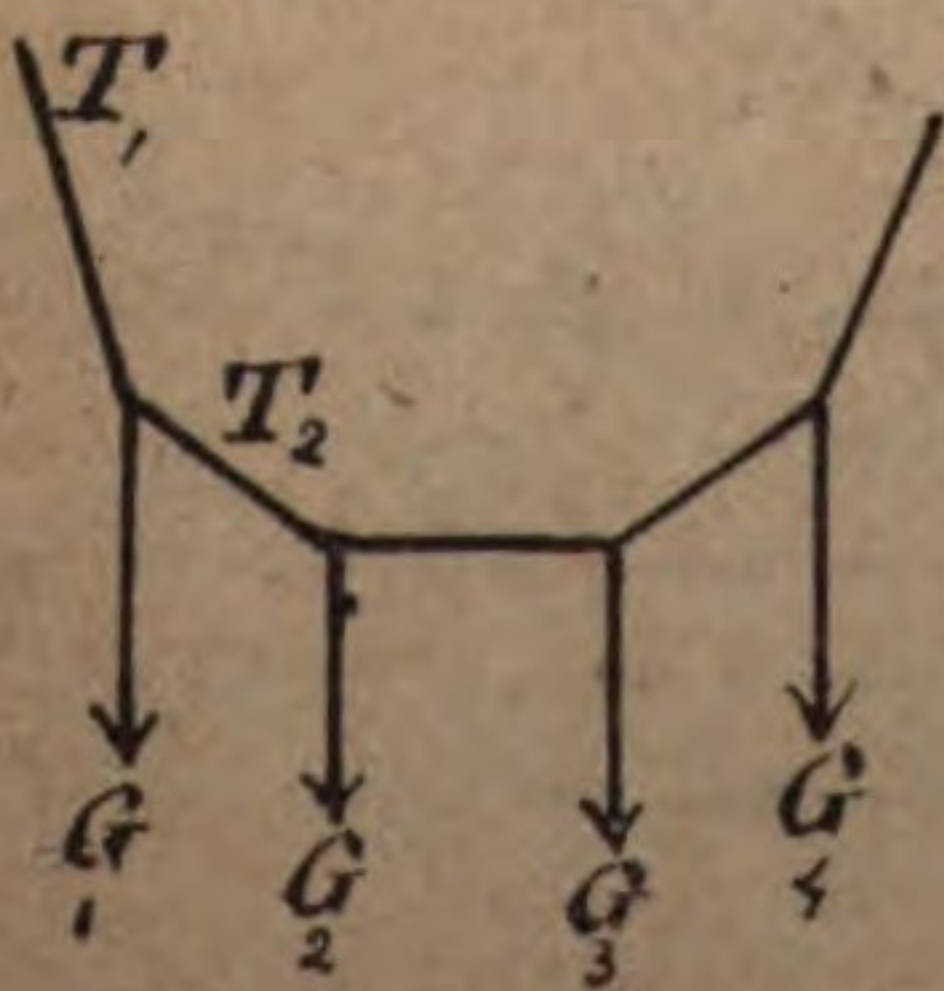
Man kann diese Gleichungen bei der Bestimmung der Geschwindigkeiten zu Grunde legen. Zu dem Ende findet man leicht das eine nach das andere der betrachteten beiden Größen, indem die unelastischen Elasticität der Körper bei der Ausdehnung unmittelbar nach der Zusammenstoßung durch den Stoß nur einen Theil der verlorenen Geschwindigkeiten wieder erhalten läßt.

I. 37. Vom Seilpolygon

Ein Gestalt im Raume, welche an bestimmten Stellen von äußeren Kräften ergriffen wird, ist bestimmt, daß die Spannung, welche durch die inneren Kräfte hervorgerufen wird zwischen zwei Angriffspunkten

der äußeren Kräfte und jeder Stelle dieselbe sein muß. An jedem Knoten-
punkte des Seils sind also die Kräfte vorhanden, welche einander des Gleich-
gewichts halten müssen, die Spannungen der auf ein-
ander folgenden Seilstücke u. die äußeren Kräfte.
Kann also die äußeren Kräfte, sowie die Länge der
einzelnen Seilstücke gegeben sein, so kennt man die Coordinaten der
Anknüpfungspunkte u. die Richtungen der Seilstücke beschreiben können.
Für das betrachtete System ist also T_2 im Punkte $x_2 y_2$ der Resultierenden
von T_1 und P_2 gleich u. entgegengesetzt, also ebenso auch in $x_3 y_3$ der Re-
sultierenden von T_3 und P_3 . Nur da T_2 in beiden Punkten entgegengesetzte
Richtung hat, so müssen auch jene Resultierenden einander gleich u. entgegengesetzt
sein. Des Gleichgewichts bedarf daher auch, wenn man das Seilstück, welche
die Spannung T_2 hat, ganz fernbringt. Nur wenn man dasselbe fer-
nbringt auf die anderen Seilstücke wieder auf findet sich der Satz:

Die äußeren Kräfte müssen einander des Gleichgewichts halten, wenn
man sie sämtlich in einem Punkte überträgt. Hierunter versteht man die Kräfte
aufstellen, welche das Seil an denjenigen Aufhängepunkten tragen. Hiermit folgt
insbesondere, wenn alle äußeren Kräfte aus einer Gewichtskraft dargestellt sind,
müssen sämtliche parallel, daß die Aufhängepunkte sich auf einer verticalen Linie
Kräfte ausgeübt werden, dann müssen der Punkt der aufgehängten Gewichte
gleich sein, wesent die horizontalen Zugkräfte einander gleich
u. entgegengesetzt sind. Man bemerkt aber sehr leicht
daß die letzte Eigenschaft für alle Knotenpunkte
gilt, so daß die horizontale Spannung überall gleich
ist, wesent die vertikale Spannungen von einem



Knotenpunkte zum anderen inneren inneren des Drahtes abnehmen.
Sind also α_1, α_2 etc. die Winkel der einzelnen Fäden gegen die Horizontale, so ist

$$23 \dots T_1 \cos \alpha_1 = T_2 \cos \alpha_2 = \dots = T_n \cos \alpha_n. \text{ Also}$$

$$T_2 \sin \alpha_2 = T_1 \sin \alpha_1 - G_1, T_3 \sin \alpha_3 = T_2 \sin \alpha_2 - G_2 = T_1 \sin \alpha_1 - (G_1 + G_2) \text{ und so}$$

$$T_n \sin \alpha_n = T_1 \sin \alpha_1 - (G_1 + G_2 + \dots + G_{n-1}).$$

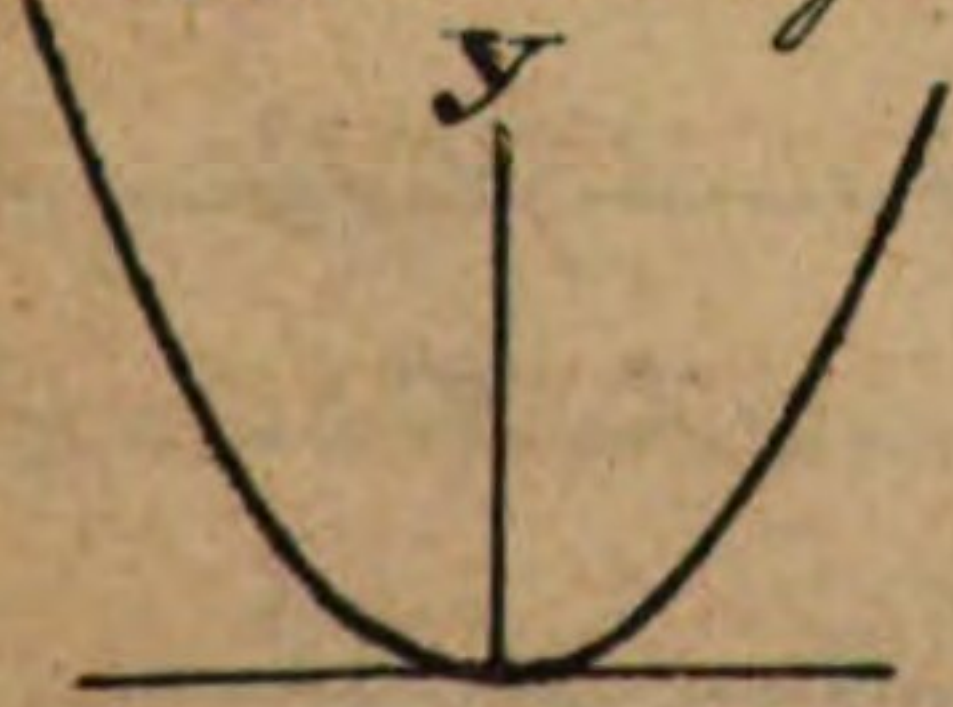
Und wenn unabhängig alle Drahte gleich sind:

$$24 \dots T_n \sin \alpha_n = T_1 \sin \alpha_1 - n G.$$

Betrachten wir den Fall noch genauer, wo die Aufhängepunkte der
Drahte in gleichen horizontalen Abständen gegen einander zu liegen kommen.
In diesem Fall set man, wenn $S_1, S_2 \dots$ die Längen der einzelnen Fäden sind, auch

$$S_1 \cos \alpha_1 = S_2 \cos \alpha_2 = \dots = S_n \cos \alpha_n \text{ weil nach dem Satz}$$

also die Längen wie die zugehörigen Spannungen. Da also die horizontalen Projec-
tionen der Fäden sämtlich gleich sind, u. wegen der oben bemerktenswerten
von der Verticalprojectioonen jede folgende um ein gewisses Stück kleiner wird
wie die vorhergehende, so folgt, daß die Knotenpunkte sämtlich auf einer Parabel
liegen, welche ihren Scheitel nach unten (bzw. in dem Augenblicke) erreicht
ist. Die niedrigste Stelle der Betreffung heißt der Gangabwärts am Ende der Drahte
ein. Wenn man die Aufhängepunkte sehr nahe an einander anbringt, so stellt
sich die Parabel der Fall des Seiles dar. Legen wir den Anfangspunkt
in den Scheitel derselben, u. nehmen die Aufhängepunkte in derselben Höhe h
über dem Scheitel, in der Entfernung $2l$ voneinander an, so set man als Spannung



für die Parabel $x^2 = 2py$ und zugleich $l^2 = 2ph$,

so daß man durch Elimination von p erhält $\frac{x^2}{l^2} = \frac{y}{h}$.

Die Verticalspannung nimmt nach oben der x Coordination proportional

sinus zu wissen die Horizontalspannung constant bleibt; daher ist für jeden beliebigen Punkt:

$$T \cos \alpha = K, \quad T \sin \alpha = m x, \quad T = \sqrt{m^2 x^2 + K^2}.$$

Wenn ferner an den Aufhängepunkten $T_0 = \frac{2y}{x} = \frac{2h}{l}$, so geben diese Gleichungen für jene Punkte über in:

$$\frac{T_0 l}{\sqrt{l^2 + 4h^2}} = K, \quad \frac{T_0 2h}{\sqrt{l^2 + 4h^2}} = m l = \frac{G}{2},$$

wo G die Belastung des ganzen Seils bezeichnet. Hieraus findet sich die Kraft

$$m = \frac{G}{2l}, \quad T_0 = \frac{G \sqrt{l^2 + 4h^2}}{4h}, \quad K = \frac{G l}{4h};$$

u. so erhalten wir endlich für den Ausdruck der Spannung

$$T = \frac{G}{2} \sqrt{\frac{x^2}{l^2} + \frac{l^2}{4h^2}} = \frac{G}{4h} \sqrt{l^2 + 4hx};$$

T_0 gibt den größten Kraft der Spannung an, K den kleinsten, für den Bogen der Krone. Je schlaffer diese erfüllt man einen Bogen, wenn man die Belastungen der Längen der einzelnen Elemente sehr klein stellt, stellt den Längen ihrer Horizontalprojektionen, proportional macht. Die ruhende Krone, die Kettenlinie, gibt den zugleich die Gestalt, welche das Seil unter dem alleinigen Einfluß seines eigenen Gewichtes annehmen würde. Dies ist nicht nur durch seinen Anschluß zugänglich. Wenn man der äußeren Kräfte nicht an einem festen Punkte angreift, sondern ihren Angriffspunkt auf verschieben kann, so werden die Spannungen der benachbarten Seilstücke sich ausgleichen, u. also wird die Gestalt des Seils sich ändern, umgekehrt für den Bogen mit der Richtung der veränderlichen Kraft gleich Winkel bilden. Fall die Kraft P , welche mit der Horizontalen



den Winkel α bildet, das Seil in ein Seil gezogenes Gewicht G fällen, wenn aber die gemessene Kraft des Seils mit der Horizontalen den Winkel 2α bilden.

Bezeichnet ein Seil, welches über einer Oberfläche gespannt ist, den im Gleichgewicht sein, wenn es in allen Punkten gleich Spannung hat, u. zwei rechte Elemente mit der Normale der Oberfläche in einem Punkt liegen u. gleiche Winkel bilden. Bezeichnet man die Krone bilden, deren Oberflächenebene an jedem Punkte durch die Normale der Krone hindurchgeht.

Clebsch, Alfred

Elementar-Mechanik nach Vorträgen, gehalten an der polytechnischen Schule 1
858 - 1859

Carlsruhe 1859

4 Math.a. 71 r

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10052805-1